УДК: 531.352:629.7

MSC 2010: 37N05, 70F15, 70F20, 70K55

О пространственных движениях орбитальной леерной связки

А. В. Родников, П. С. Красильников

Изучается движение материальной точки вдоль троса, концы которого закреплены на протяженном твердом теле, центр масс которого движется по круговой орбите в центральном ньютоновском силовом поле. (Такой трос называется леером.) Уравнения движения записываются в предположении, что трос реализует идеальную одностороннюю связь. Выводятся условия, выполнение которых гарантирует нахождение на связи, то есть на границе эллипсоида, ограничивающего движение рассматриваемой точки. Исследуется существование и устойчивость положений относительного равновесия в орбитальной системе отсчета. Доказывается устойчивость интегрального многообразия движений, принадлежащих плоскости орбиты. Отмечается, что малые колебания около интегрального многообразия движений в плоскости орбиты могут быть описаны приближенным уравнением, интегрирование которого сводится к интегрированию уравнения Риккати. Устанавливается, что пространственные решения общих уравнений движения имеют хаотический характер для начальных условий из некоторой окрестности сепаратрисного движения в плоскости круговой орбиты и регулярный характер вне этой окрестности. Отмечается также тот факт, что хаотические движения, как правило, приводят к сходу со связи, то есть к движениям внутри эллипсоида.

Ключевые слова: односторонняя связь, космическая тросовая система, леер, динамический хаос, уравнение Риккати

Получено 30 сентября 2017 года

После доработки 13 октября 2017 года

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете) (проект № 14-21-00068).

Родников Александр Владимирович
avrodnikov@yandex.ru

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
105005, Россия, г. Москва, ул. 2-ая Бауманская, д. 5

Красильников Павел Сергеевич
krasil06@rambler.ru

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
125993, Россия, Москва А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4

1. Введение

В настоящей статье изучается поведение динамической системы, являющейся простой моделью космической тросовой системы, допускающей движение одного из своих элементов вдоль троса. По-видимому, самой ранней работой, посвященной математическому описанию динамики космической тросовой системы, следует считать [6]. В следующие полвека были опубликованы десятки работ, описывающие различные аспекты динамики таких систем. Не претендуя на полноту списка, отметим только некоторые монографии [1, 5, 27] и некоторые работы (см. [2, 17, 18, 21–25]), связанные с постановками новых задач, определяемых возможным практическим использованием гибких тросов в космической практике. Тем не менее, основной моделью, учитывающей особенности динамики реальной конструкции, остается динамическая система, состоящая из двух материальных точек, связанных между собой невесомой гибкой связью (в том смысле, что расстояние между этими точками не может быть больше заданной величины). Между тем, система, состоящая из твердого тела, движение которого задано, и материальной точки, способной передвигаться вдоль троса, концы которого закреплены на твердом теле, отличается от классической прежде всего тем, что движение материальной точки ограничено не сферой, а эллипсоидом вращения. Такая система называется леерной. По-видимому, динамика леерной системы впервые изучалась одним из авторов этой работы в [12–14]. Отметим, однако, более раннюю работу [9], в которой предусматривалась возможность движения вдоль троса, но изучалась равновесная конфигурация. С практической точки зрения, леерную систему можно рассматривать как транспортную. Аналогичным целям служат системы, которые можно объединить термином «космический лифт». Динамика движения вдоль таких лифтов, по существу представляющих собой прямые тросы (допускающие разве что малые поперечные колебания) и соединяющих планету и космический аппарат или два космических аппарата, изучались в [19] и др.

Если рассматривать трос, соединяющий элементы тросовой (в том числе и леерной) системы, как одностороннюю голономную идеальную связь, можно выделить два типа движения материальной точки, находящейся на тросе. Если точка движется вдоль границы связи, ее движение называют связным. Если при этом сила натяжения троса не равна нулю, будем называть это движение строго связным. Если точка движется так, что сила натяжения троса равна нулю, то ее движение называют свободным. Если при этом не происходит выхода на границу связи, будем называть движение строго свободным. Переход от связного движения к свободному будем называть сходом со связи. Оба типа движения могут быть описаны в рамках одной и той же системы уравнений движения с множителем Лагранжа, если эти уравнения дополнены условием на знак множителя Лагранжа. (Такое условие будем называть «условием нахождения на связи».) Отметим также, что переход от свободного к связному движению, как правило, невозможен, так как выход точки на границу связи трансверсален к этой границе и приводит к удару о связь [10]. Если считать такие удары абсолютно упругими, можно говорить о возникновении динамического бильярда [3, 7, 11, 15, 16], отдельные случаи безударного «выхода на связь» отмечены еще в [2], а для леерной системы исследовались в [13].

Будем изучать движение леерной системы, состоящей из массивного твердого тела (космического аппарата), движущегося по круговой орбите в центральном ньютоновском силовом поле, и материальной точки; масса точки мала по сравнению с массой твердого тела и движение точки ограничено тросом, концы которого закреплены на штанге, жестко связанной с твердым телом. Для определенности будем считать, что штанга расположена

в плоскости орбиты. Предположим также, что длины штанги и леера малы по сравнению с радиусом орбиты. В этом случае уравнения движения оказываются интегрируемыми, если материальная точка совершает свободное движение или не покидает плоскость орбиты. Хотя уравнения движения допускают интеграл Якоби, численный анализ показывает, что если считать наложенную связь двусторонней, пространственные движения материальной точки, начинающиеся из окрестности сепаратрисного движения в плоскости орбиты, являются хаотическими, что является признаком неинтегрируемости задачи в целом (см. [8, 20] и др.). Такие движения, однако, обычно приводят к сходу со связки. В то же время движения, начинающиеся из плоскости орбиты, но вне некоторой окрестности сепаратрисы, оказываются регулярными. Можно показать, что при малых начальных отклонениях из плоскости орбиты траектория связанного движения материальной точки остается в малой окрестности этой плоскости, что указывает на устойчивость интегрального многообразия движений в плоскости орбиты, причем оказывается, что исходные уравнения движения могут быть редуцированы до уравнения Риккати.

2. Обозначения, параметры, переменные

Пусть центр масс O некоторого твердого тела движется по круговой орбите в центральном ньютоновском силовом поле. Свяжем с точкой O орбитальную систему координат, направив ось Ox от притягивающего центра, ось Oy по касательной к орбите в направлении движения и ось Oz так, чтобы тройка $Oxyz$ была правой. Пусть с твердым телом связана штанга F_1F_2 с центром C , расположенная в плоскости Cxy под постоянным углом α к оси Ox . (Не ограничивая общности, будем считать $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.) Предположим, что материальная точка M массы m может двигаться без трения вдоль троса (леера), концы которого закреплены в точках F_1 и F_2 (рис. 1). В этом случае движение точки M оказывается ограниченным эллипсоидом вращения с некоторым эксцентриситетом e с фокусами в F_1 и F_2 . Будем считать координаты точки M в $Oxyz$ безразмерными, положив длину троса равной 2 и, тем самым, большую полуось эллипсоида равной 1. В этом случае безразмерными параметрами задачи оказываются величины e , x_C , y_C , где x_C , y_C — безразмерные координаты точки C ; не ограничивая общности рассуждений, можно принять $x_C \geq 0$, а координаты (x, y, z) материальной точки M ограничены неравенством

Рис. 1. К постановке задачи.

$$((x - x_C) \cos \alpha + (y - y_C) \sin \alpha)^2 + \frac{((x - x_C) \sin \alpha - (y - y_C) \cos \alpha)^2 + z^2}{1 - e^2} - 1 = F(x, y, z) \leq 0, \quad (2.1)$$

задающим одностороннюю связь, наложенную на движение точки M , причем связанному движению точки M соответствует знак равенства, а строго свободному движению знак $<$.

3. Общие уравнения движения и интеграл Якоби

Если считать, что длины штанги F_1F_2 и троса малы по сравнению с радиусом круговой орбиты, то уравнения движения точки M могут быть записаны в виде (см., например, [4])

$$x'' - 2y' - 3x = \lambda \partial F / \partial x, \quad (3.1)$$

$$y'' + 2x' = \lambda \partial F / \partial y,$$

$$z'' + z = \lambda \partial F / \partial z, \quad (3.2)$$

где штрихом обозначена производная по безразмерному времени τ ($\tau = 2\pi$ соответствует одному обороту твердого тела по орбите), а λ — множитель Лагранжа. Очевидно, $\lambda \leq 0$, причем $\lambda < 0$ для строго связанного движения и $\lambda = 0$ для свободного движения. В последнем случае система уравнений движения легко интегрируется.

Система уравнений (3.1)–(3.2) допускает интеграл Якоби

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - 3x^2 + z^2 = 2h = \text{const}, \quad (3.3)$$

константа которого сохраняет свое значение при сходе со связи, а если считать удары о границу связи абсолютно упругими, то и при возникновении динамического бильярда. Отметим также, что из (2.1) следует, что правые части (3.1) не зависят от z , то есть если $z(0) = z'(0) = 0$, то материальная точка M не покидает плоскость Oxy и уравнения (3.1) можно интегрировать отдельно, то есть существует «плоский режим» движения по леерной связи.

4. Об отклонениях из плоскости орбиты.

Устойчивость интегрального многообразия движений в плоскости орбиты

Заметим, что уравнение (3.2) можно переписать в виде

$$z'' + \omega^2 z = 0, \quad (4.1)$$

где ω — некоторая функция, вообще говоря, зависящая от всех координат и скоростей, но $\omega = 1$ для свободного движения и $1 + q < \omega^2 < 1 + Q$ для каждого из строго связанных движений (q и Q — некоторые константы, вообще говоря, зависящие от начальных условий). Таким образом, в случае свободного движения возможны только простые колебания вокруг плоскости орбиты, с амплитудой тем меньшей, чем меньше начальные значения z и z' .

Покажем, что если для всех τ движение точки M остается строго связным, то решение $z(\tau)$ уравнения (3.2) имеет бесконечно много нулей, причем расстояние между соседними нулями не превосходит π . Примем без ограничения общности, что либо $z(0) > 0$, либо $z(0) = 0$ и $z'(0) > 0$. Сравним между собой $z(\tau)$ и решение уравнения $u'' + u = 0$ с теми же начальными условиями. Для этого рассмотрим функцию $\psi(\tau) = u(\tau) - z(\tau)$, которая, как нетрудно проверить, взяв от нее вторую производную в силу рассматриваемых уравнений, будет возрастающей по крайней мере до тех пор, пока $z(\tau) > u(\tau)/(1 + q)$. Но тогда неминуемо существует момент времени τ_1 , когда $z(\tau_1) = u(\tau_1)/(1 + q)$. Далее рассмотрим функцию $\psi_1(\tau) = u(\tau) - z(\tau)/(1 + q)$. Нетрудно убедиться, что эта функция возрастает начиная с $\tau = \tau_1$, пока график $z(\tau)$ не пересечет график функции $u(\tau)/(1 + q)^2$ при некотором $\tau = \tau_2$. Очевидно, что далее можно сравнивать $z(\tau)$ с $u(\tau)/(1 + q)^2$, $u(\tau)/(1 + q)^3$ и т. д. В результате получится ограниченная возрастающая последовательность моментов времени $\tau_1, \tau_2, \dots$,

сходящаяся, очевидно, к некоторому τ^* , такому, что $z(\tau^* = 0)$, причем $\tau^* < \pi$. Описанную процедуру можно повторить, считая τ^* начальным моментом времени, тем самым устанавливая существование следующего нуля; процесс можно продолжить до бесконечности.

Учитывая, что решения уравнений $u'' + u = 0$ и $u'' + (1 + q)u = 0$ являются ограниченными функциями, процедурой, подобной описанной, можно доказать, что $\max |z(\tau)|$ оказывается тем меньше, чем меньше $z(0)$ и $z'(0)$. Этот факт доказывает устойчивость движений в плоскости орбиты по переменной z , по крайней мере для движений, не содержащих бесконечной последовательности ударов о связь.

5. Интеграл Якоби и условие нахождения на границе леерной связи

Для описания связанных движений, то есть движений по поверхности эллипсоида, определяемого формулой (2.1), будем использовать специальные координаты γ и φ , определяемые равенствами

$$\begin{aligned} x &= x_C + \cos \varphi \cos \gamma \cos \alpha - \sqrt{1 - e^2} \cos \varphi \sin \gamma \sin \alpha, \\ y &= y_C + \cos \varphi \cos \gamma \sin \alpha + \sqrt{1 - e^2} \cos \varphi \sin \gamma \cos \alpha, \\ z &= \sqrt{1 - e^2} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Переменная φ при этом определяет эллипсы, получающиеся при сечении эллипсоида (2.1) плоскостями, параллельными плоскости орбиты, а переменная γ определяет эксцентрическую аномалию точки на границе такого эллипса. Интеграл Якоби (3.3) в переменных γ, φ запишется как

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}(1 - e^2 \cos^2 \gamma) \cos^2 \varphi \cdot \gamma'^2 + \frac{3e^2}{4} \sin 2\varphi \sin 2\gamma \cdot \varphi' \gamma' + \frac{1}{2}(e^2 \cos^2 \gamma \sin^2 \varphi + 1 - e^2) \varphi'^2 - \\ &- \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha (\cos 2\gamma + e^2 \sin^2 \gamma) + \frac{3}{2}(1 - e^2) \cos^2 \gamma \cos^2 \varphi + \\ &+ 3 \cos \varphi \cos \gamma \cos \alpha (\sqrt{1 - e^2} \cos \varphi \sin \gamma \sin \alpha - x_C) + 3x_C \sqrt{1 - e^2} \sin \varphi \sin \gamma \sin \alpha - \\ &- 2(1 - e^2) \cos^2 \varphi + \frac{1}{2}(1 - e^2 - x_C^2) = \text{const}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Подставив равенства (5.1) в (3.1), (3.2), разрешим получающуюся систему уравнений относительно γ'', φ'' и λ . Тогда условие нахождения на связи $\lambda \leq 0$ запишется как

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda(1 - e^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \gamma)}{\sqrt{1 - e^2}} &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - e^2} \cos^2 \varphi \cdot \gamma'^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1 - e^2} \varphi'^2 + (1 - e^2 \cos^2 \gamma) \cos^2 \varphi \cdot \gamma' + \\ &+ \frac{e^2}{4} \cos 2\varphi \cos 2\gamma \cdot \varphi' + \frac{3}{2} \sqrt{1 - e^2} \cos 2\gamma \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \\ &+ 3\sqrt{1 - e^2} \cos \varphi \cos \gamma \cos \alpha (x_C - \sqrt{1 - e^2} \sin \alpha \sin \gamma \cos \varphi) - \frac{3}{2} x_C \sin \alpha \sin \gamma \cos \varphi + \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{1 - e^2} (3 \cos^2 \varphi \sin^2 \gamma - \sin^2 \varphi) \geq 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

(Явный вид выражений для γ'', φ'' не приводится в связи с их крайней громоздкостью.)

6. Положения равновесия в орбитальной системе отсчета и их устойчивость

Анализ интеграла Якоби (5.2) показывает, что положения равновесия материальной точки M в системе координат $Oxyz$ возможны только при $\varphi = 0$, то есть только в плоскости Oxy . Такими положениями равновесия являются все точки пересечения оси Ox с эллипсоидом (2.1). Множество таких положений равновесия не пусто, если $x_C \leq \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \alpha}$. Нетрудно видеть, что все эти равновесия неустойчивы. Кроме того, связным равновесием является точка эллипсоида (2.1) с максимально возможной координатой по оси Ox , для которой $\gamma = -\arctg(\sqrt{1 - e^2 \tan^2 \alpha})$. В этой точке достигается минимум интеграла Якоби, что доказывает ее устойчивость. Кроме того, если $x_C < \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \alpha}$, то локальный минимум интеграла Якоби достигается в точке $\gamma = \pi - \arctg(\sqrt{1 - e^2 \tan^2 \alpha})$ с минимально возможной координатой по оси Ox . Заметим, что такое положение равновесия формально существует и в том случае, когда эллипсоид не пересекается с Ox , но тогда в этой точке $\lambda > 0$ и равновесие физически нереализуемо.

7. Об интегрировании уравнений движения при малых колебаниях в окрестности плоскости орбиты

Если считать, что величины φ и φ' остаются малыми во все время движения, то есть точка M совершает «малые колебания» около плоскости круговой орбиты твердого тела, то, оставляя в полных уравнениях движения и условии схода со связи (5.3) только линейные по φ и φ' слагаемые, можно установить, что уравнение для γ'' окажется независимым от φ и ее производных и фактически превратится в уравнение движения в плоскости орбиты, допускающее интеграл Якоби

$$h = \frac{1}{2}(1 - e^2 \cos^2 \gamma)(\gamma'^2 + 1) + \frac{3}{4}\sqrt{1 - e^2} \sin 2\gamma \sin 2\alpha - \frac{3}{2}(e^2 \sin^2 \gamma + \cos 2\gamma) \cos^2 \alpha + \\ + 3(\sqrt{1 - e^2} \sin \gamma \sin \alpha - \cos \gamma \cos \alpha)x_C + \frac{3}{2}(1 - e^2 - x_C^2) = \text{const}, \quad (7.1)$$

в выражении для λ также исчезнут величины φ и φ' , и оно примет вид

$$-\frac{2\lambda(1 - e^2 \cos^2 \gamma)}{\sqrt{1 - e^2}} = \sqrt{1 - e^2}\gamma'^2 + 2(1 - e^2 \cos^2 \gamma)\gamma' + \\ + 3(\sqrt{1 - e^2} \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha)x_C + 3\sqrt{1 - e^2} \cos 2\gamma \cos^2 \alpha + \\ + \frac{3}{4}(e^2 - 2) \sin 2\gamma \sin 2\alpha + \frac{3}{2}\sqrt{1 - e^2} \sin 2\gamma \geq 0. \quad (7.2)$$

Таким образом, при малых отклонениях из плоскости орбиты закон изменения переменной γ может быть получен из (7.1), а (3.2) может быть записано как уравнение

$$z'' + (1 - 2\lambda(\gamma(\tau), \gamma'(\tau))/(1 - e^2))z = 0, \quad (7.3)$$

преобразуемое стандартной заменой $z' = vz$ в уравнение Риккати

$$v' + v^2 = 2\lambda(\gamma(\tau), \gamma'(\tau))/(1 - e^2) - 1. \quad (7.4)$$

8. О движениях в плоскости орбиты

Не выписывая явно закон изменения γ , определяемый интегралом (7.1), укажем возможные типы фазовых портретов связанных движений в плоскости орбиты на фазовом цилиндре $(\gamma \bmod 2\pi, \gamma')$, вырезав из него «области схода со связи», определяемые неравенством $\lambda > 0$, в которых связанное движение невозможно. (Эти области закрашены на рис. 2–5.) Если $x_C \geq \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \alpha}$, то фазовый портрет оказывается фактически совпадающим с фазовым портретом математического маятника (см. рис. 2). Если же $x_C < \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \alpha}$, то из-за наличия двух устойчивых положений равновесия фазовый портрет оказывается несколько более сложным. Неустойчивыми равновесиями при этом оказываются точки пересечения оси Ox с границей эллипсоида (2.1) (см. рис. 3–5).

Отметим, что область схода со связи в рассматриваемом случае, как правило, оказывается состоящей из двух (рис. 3) или одного (рис. 2) дисков, однако при сравнительно больших e и углах α , близких к $\pi/2$, область схода со связи может состоять из большего числа дисков (рис. 5) или охватывать фазовый цилиндр (рис. 4). Фазовые портреты для случая, когда $x_C = 0$ и $\alpha = \pi/2$ представлены в [12].

Рис. 2. $e = 1/2$, $\alpha = \pi/4$, $x_C = 3/2$.

Рис. 3. $e = 1/4$, $\alpha = \pi/6$, $x_C = 1/2$.

Рис. 4. $e = 0.95$, $\alpha = 89^\circ 23'$, $x_C = 0$. Рис. 5. $e = 0.83$, $\alpha = 89^\circ$, $x_C = 0$.

9. О хаотизации движения

Численный анализ связанных решений полных уравнений движения материальной точки M показывает, что ее движения могут носить хаотический характер. Такая ситуация возникает, если константа интеграла Якоби (5.2) оказывается близкой к константе интеграла (7.1), соответствующей сепаратрисному движению в плоскости Oxy , или же если движение начинается из точек фазового цилиндра $(\gamma \bmod 2\pi, \gamma')$, близких к сепаратрисе. Этот факт свидетельствует о неинтегрируемости общих уравнений движения рассматриваемой задачи. Тем не менее, следует заметить, что при других значениях константы интеграла Якоби и других начальных условиях движения точки M носят регулярный характер. Кроме того, хаотические движения, как правило, приводят к сходу со связи.

Проиллюстрируем сформулированные выше утверждения для частного случая $\alpha = \pi/2$, $x_C = 0$, являющегося, возможно, наиболее реализуемым с практической точки зрения, так как в этом случае нет необходимости создавать протяженный космический объект, а достаточно закрепить концы лееера на двух тяжелых спутниках, движущихся по одной круговой орбите. В этом случае уравнения связанного движения и условие нахождения на связи в пе-

ременных φ , γ записываются как

$$\begin{aligned} (1 - e^2 \cos^2 \gamma \cos^2 \varphi) \cdot \varphi'' + \frac{e^2}{2} \sin 2\varphi \cos^2 \gamma \cdot \varphi'^2 + \frac{e^2}{\sqrt{1 - e^2}} \sin^2 \varphi \sin 2\gamma \cdot \varphi' + \\ + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \cdot \gamma'^2 + \frac{1 - e^2 \cos^2 \gamma}{\sqrt{1 - e^2}} \sin 2\varphi \cdot \gamma' + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \cdot (1 - e^2 \cos^2 \gamma + 3 \sin^2 \gamma) = 0, \\ (1 - e^2 \cos^2 \gamma \cos^2 \varphi) \cdot \gamma'' + \frac{e^2}{2} \sin 2\gamma \cdot \varphi'^2 + 2 \operatorname{tg} \varphi \cdot \gamma' \varphi' + \frac{1}{2} \sin 2\gamma \cos^2 \varphi \cdot \gamma'^2 - \\ - \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 - e^2}} (e^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma + 1 - e^2) \cdot \varphi' + - \frac{e^2 \sin 2\gamma \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot \gamma' + \\ + \frac{1}{2} \sin 2\gamma (4e^2 \cos^2 \varphi - e^2 - 3) = 0, \end{aligned} \quad (9.1)$$

$$\begin{aligned} - \frac{2\lambda(1 - e^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \gamma)}{\sqrt{1 - e^2}} = \sqrt{1 - e^2} \varphi^2 + \frac{e^2}{2} \sin 2\varphi \sin 2\gamma \cdot \varphi' + \sqrt{1 - e^2} \cos^2 \varphi \cdot \gamma'^2 + \\ + 2 \cos^2 \varphi \cdot (1 - e^2 \cos^2 \gamma) \gamma' + \sqrt{1 - e^2} (3 \cos^2 \varphi \sin^2 \gamma - \sin^2 \varphi) \geq 0, \end{aligned} \quad (9.2)$$

а интеграл Якоби — как

$$\begin{aligned} 2h = (e^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \gamma + 1 - e^2) \varphi'^2 + \frac{e^2}{2} \sin 2\varphi \sin 2\gamma \cdot \varphi' \gamma' + \\ + (1 - e^2 \cos^2 \gamma) \cos^2 \varphi \cdot \gamma'^2 - (1 - e^2) (4 - 3 \cos^2 \gamma) \cos^2 \varphi + 1 - e^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Зафиксировав значение константы интеграла Якоби h и начальное значение φ' и считая $\varphi(0) = 0$, а также пользуясь тем, что, как доказано выше, траектория движения точки M , не лежащая целиком в плоскости Oxy , бесконечное число раз пересекает эту плоскость, будем отмечать на фазовом цилиндре $(\gamma \bmod 2\pi, \gamma')$ значения γ , γ' в моменты пересечения точкой M плоскости орбиты, тем самым реализуя отображение Пуанкаре плоскости Oxy . При этом будем считать, что движение всегда является связным, то есть не будем учитывать условие (9.2), считая наложенную связь двусторонней.

Например, при $h = 0$, что в рассматриваемой ситуации соответствует сепаратрисному движению в плоскости Oxy , и при достаточно малом значении $\varphi'(0)$ имеют место только хаотические траектории (см. рис. 6, на этом и всех следующих рисунках изображены траектории, для которых $-\pi \leq \gamma(0) \leq 0$).

В то же время при увеличении $|\varphi'(0)|$ часть траекторий (рис. 7) приобретают регулярный характер, причем при некотором увеличении значения константы интеграла Якоби все траектории могут оказаться регулярными (пример см. на рис. 8), однако при несколько меньших $|\varphi'(0)|$ имеет место как хаотическое, так и регулярное поведение (см. рис. 9).

Пример хаотического поведения траекторий точки M при значении константы интеграла Якоби, достаточно далеко от сепаратрисного, изображен на рисунке 10. В этом случае начальное значение φ' подобрано так, чтобы точка $(\gamma(0), \gamma'(0))$ оказывалась в малой окрестности сепаратрисы.

В других ситуациях (см., например, рис. 7, 11) траектории, как правило, носят регулярный характер.

Если вернуться к учету условия схода со связи (9.2), то есть «очистить» рисунки от точек, до достижения которых произошел сход со связи (то есть множитель λ стал положительным), окажется, что хаотические траектории, как правило, приводят к сходу со связи,

Рис. 6. $e = 0.25$, $h = 0$, $\varphi'(0) = -0.05$. Рис. 7. $e = 0.25$, $h = 0$, $\varphi'(0) = -1$. Рис. 8. $e = \sqrt{3}/2$, $h = 1/128$, $\varphi'(0) = 1$.

Рис. 9. $e = \sqrt{3}/2$, $h = 1/128$, $\varphi'(0) = 0.5$.

Рис. 10. $e = 0.5$, $h = 3/8$, $\varphi'(0) = -1$.

Рис. 11. $e = 0.5$, $h = 3/8$, $\varphi'(0) = 0.5$.

Рис. 12. $e = 0.25$, $h = 0$, $\varphi'(0) = -1$.

а регулярные — нет. Так, если «очистить» рисунок 6, на нем практически не останется точек. Результат «очистки» рисунка 7 изображен на рисунке 12. Оставшиеся «нерегулярные» точки соответствуют тем первым пересечениям хаотических траекторий с плоскостью орбиты, для которых множитель Лагранжа еще остается отрицательным.

Выводы

В настоящей работе показано, что пространственные движения точки по леерной связи, закрепленной на твердом теле, движущемся по круговой орбите в центральном ньютоновском силовом поле, могут носить хаотический характер, что указывает на неинтегрируемость задачи, однако эти движения представляются колебаниями вокруг плоскости орбиты. Кроме того, установлено, что если отклонения от плоскости орбиты малы, то решения задачи могут быть аппроксимированы решениями, получаемыми интегрированием неавтономного дифференциального уравнения первого порядка.

References

- [1] Alpatov A. P., Beletsky V. V., Dranovskii V. I., Khoroshilov V. S., Pirozhenko A. V., Troger H., Zakrzhevskii A. E. *Dynamics of tethered space systems*, Boca Raton, Fla.: CRC Press, 2010.
- [2] Beletsky V. V. On relative motion of two bodies couple on the orbit: 2, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1969, vol. 7, no. 6, pp. 827–840 (Russian).
- [3] Beletsky V. V. *Reguläre und chaotische Bewegung starrer Körper*, Leipzig: Teubner, 1995.
- [4] Beletskii V. V. *Essays on the motion of celestial bodies*, Basel: Birkhäuser, 2001.
- [5] Beletsky V. V., Levin E. M. *Dynamics of space tether systems*, San Diego, Calif.: Univelt, 1993.
- [6] Beletsky V. V., Novikova E. T. On relative motion of two body couple on the orbit, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1969, vol. 7, no. 3, pp. 377–384 (Russian).
- [7] Beletskii V. V., Kugushev E. I., Starostin E. L. Free manifolds of dynamic billiards, *Regul. Chaotic Dyn.*, 1997, vol. 2, nos. 3–4, pp. 62–71 (Russian).
- [8] Borisov A. V., Mamaev I. S. *Dynamics of a rigid body: Hamiltonian methods, integrability, chaos*, 2nd ed., Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2005 (Russian).

- [9] Burov A. A. The existence and stability of the equilibria of mechanical systems with constraints produced by large potential forces, *J. Appl. Math. Mech.*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 193–200; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 222–230.
- [10] Ivanov A. P. *Dynamics of systems with mechanical collisions*, Moscow: Int. Programm of Education, 1997 (Russian).
- [11] Kozlov V. V., Treshchev D. V. *Billiards: A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, Transl. Math. Monogr., vol. 89, Providence, R.I.: AMS, 1991.
- [12] Rodnikov A. V. Equilibrium positions of a weight on a cable fixed to a dumbbell-shaped space station moving along a circular geocentric orbit, *Cosmic Research*, 2006, vol. 44, no. 1, pp. 58–68; see also: *Kosmicheskie Issledovaniya*, 2006, vol. 44, no. 1, pp. 62–72.
- [13] Rodnikov A. V. Existence of nonimpact motions along a wire rope fixed to an extended spacecraft, *Cosmic Research*, 2006, vol. 44, no. 6, pp. 532–539; see also: *Kosmicheskie Issledovaniya*, 2006, vol. 44, no. 6, pp. 553–560.
- [14] Rodnikov A. V. On a particle motion along the leier fixed in a precessing rigid body, *Nelin. Dinam.*, 2011, vol. 7, no. 2, pp. 295–311 (Russian).
- [15] Beletsky V. V., Kasatkin G. V., Starostin E. L. The pendulum as a dynamical billiard, *Chaos Solitons Fractals*, 1996, vol. 7, no. 8, pp. 1145–1178.
- [16] Beletsky V. V., Pankova D. V. Connected bodies in the orbit as dynamic billiard, *Regul. Chaotic Dyn.*, 1996, vol. 1, no. 1, pp. 87–103.
- [17] Burov A. A., Guerman A. D., Kosenko I. I., Ferraz A., Nikonov V. I. Dynamics of space elevator on asteroid, in *Space – The Gateway for Mankind’s Future: Proc. of the 66th Internat. Astronautical Congr. (IAC’2015, Jerusalem, Israel, Oct 2015): Vol. 12*, pp. 9496–9504.
- [18] Burov A. A., Kosenko I. I., Guerman A. D. Uniform rotations of tethered system connected to a Moon surface, *Acta Astronaut.*, 2015, vol. 116, pp. 349–354.
- [19] Burov A. A., Kosenko I. I., Troger H. On periodic motions of an orbital dumbbell-shaped body with a cabin-elevator, *Mech. Solids*, 2012, vol. 47, no. 3, pp. 269–284; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2012, no. 3, pp. 12–31.
- [20] Lichtenberg A. J., Lieberman M. A. *Regular and chaotic dynamics*, 2nd ed., Appl. Math. Sci., vol. 38, New York: Springer, 1992.
- [21] Lanoix E. L.-M., Misra A. K. Near-Earth asteroid missions using tether sling shot assist, *J. Spacecraft Rockets*, 2000, vol. 37, no. 4, pp. 475–480.
- [22] Misra A. K. Dynamics of a tether attached to an asteroid, in *7th Internat. Workshop and Advanced School «Spaceflight Dynamics and Control»*, www.aerospace.ubi.pt/workshop2012/Abstract_Misra.pdf (2012).
- [23] Pearson J. Anchored lunar satellites for cislunar transportation and communication, *J. Astronaut. Sci.*, 1979, vol. 27, no. 1, pp. 39–62.
- [24] Peláez J., Bombardelli C., Scheeres D. J. Dynamics of a tethered observatory at Jupiter, *J. Guid. Control Dyn.*, 2012, vol. 35, no. 1, pp. 195–207.
- [25] Rodnikov A. V. The algorithms for capture of the space garbage using «leier constraint», *Regul. Chaotic Dyn.*, 2006, vol. 11, no. 4, pp. 483–489.
- [26] Rodnikov A. V. Rotations of a dumbbell equipped with the «leier constraint», *J. Vibroeng.*, 2008, vol. 10, no. 4, pp. 557–561.
- [27] *Tethers in space handbook*, M. L. Cosmo, E. C. Lorenzini (Eds.), 3rd ed., Huntsville, Ala.: NASA Marshall Space Flight Center, 1997.

On spacial motions of an orbital tethered system

Alexander V. Rodnikov¹, Pavel S. Krasilnikov²

¹Bauman Moscow State Technical University
ul. 2-nd Baumanskaya 5, Moscow, 105005, Russia

²Moscow Aviation Institute (National Research University)
Volokolamskoe sh. 4, GSP-3, A-80, Moscow, 125993, Russia

¹avrodnikov@yandex.ru, ²krasil06@rambler.ru

We study motions of a particle along a rope with ends fixed to an extended rigid body whose center of mass traces out a circular orbit in the central Newtonian force field. (Such a rope is called a tether.) We assume that the tether realizes an ideal unilateral constraint. We derive particle motion equations on the surface of the ellipsoid, which restricts the particle motion, and conditions that guarantee such motions. We also study the existence and stability of relative equilibria of the particle with respect to the orbital frame of reference. We prove stability of the integral manifold of the particle motions in the plane of the orbit. We note that small-amplitude librations near this manifold can be described by approximate equations that can be reduced to Riccati's equation. We establish that generally the spacial motions of the particle are chaotic for initial conditions from some vicinity of the separatrix motion in the plane of the orbit and are regular in other cases. We also note that chaotic motions usually lead to a situation where the particle comes off the constraint, in other words, to motions inside the above-mentioned ellipsoid.

MSC 2010: 37N05, 70F15, 70F20, 70K55

Keywords: space tethered system, unilateral constraint, tether, chaos, Riccati equation

Received September 30, 2017, accepted October 13, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 505–518 (Russian)