ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.43

MSC 2010: 70E18, 70F40

О движении шайбы по горизонтальной плоскости в модели вязкого трения с переменным коэффициентом

Е. И. Кугушев, Т. В. Попова

Рассматривается задача о движении однородного прямого цилиндра с кольцевым основанием (шайбы) по горизонтальной плоскости с вязким трением. На каждую точку основания шайбы, соприкасающуюся с плоскостью, действует сила вязкого трения, пропорциональная скорости этой точки, причем коэффициент пропорциональности линейно зависит от плотности нормальной реакции в этой точке. Плотность нормальной реакции определяется в рамках динамически совместной модели. Исследуются некоторые свойства движения. В частности, показано, что при заданном направлении начальной угловой скорости шайбы в зависимости от параметров модели вязкого трения траектория центра масс шайбы может отклоняться как влево, так и вправо от прямой, направленной по вектору начальной скорости центра масс шайбы.

Ключевые слова: шайба с кольцевым основанием, вязкое трение, коэффициент трения, динамически совместная модель нормальных реакций

Получено 17 декабря 2017 года
После доработки 12 марта 2018 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00887).

Кугушев Евгений Иванович
kugushev@keldysh.ru
Попова Татьяна Валентиновна
t.shahova@yandex.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

1. Постановка задачи

Движению по плоскости с трением осесимметричного тела, опирающегося на кольцевое основание, посвящен большой круг работ [1–14]. В данной работе осесимметричное тело с кольцевым основанием движется по неподвижной горизонтальной плоскости с вязким трением. Используется модель Ньютона вязкого внутреннего трения для соприкасающихся поверхностей, разделенных слоем смазки [5]. Плотность $\mathbf{f}_{\text{тр}}$ силы трения в любой точке соприкосновения поверхностей определяется законом $\mathbf{f}_{\text{тр}} = -\eta d^{-1} \mathbf{v}$, где η — коэффициент вязкости, d — толщина слоя смазки, $\mathbf{v}$ — относительная скорость в точке соприкосновения. При этом формально предполагается, что коэффициент вязкости постоянен, а толщина слоя смазки в каждой точке контакта основания тела с плоскостью зависит только от плотности p_n нормальной реакции в этой точке: $d^{-1} = \varphi(p_n)$. Применимость таких предположений и вид функции $\varphi(p_n)$ зависят от свойств контактирующих поверхностей и в данной работе не обсуждаются. В первом приближении считается, что величина, обратная толщине слоя смазки, линейно зависит от плотности нормальной реакции: $\varphi(p_n) = k_0 + k_1 p_n$. Тогда $\mathbf{f}_{\text{тр}} = -(c_0 + c_1 p_n) \mathbf{v}$, где $c_i = \eta k_i$, $i = 0, 1$ — некие постоянные величины. Распределение плотности нормальной реакции на поверхности контакта определяется в рамках динамически совместной модели [6].

Дадим формальное описание задачи. Рассматривается движение однородного прямого цилиндра с кольцевым основанием (шайбы) по неподвижной горизонтальной плоскости с вязким трением. Предполагается, что шайба опирается о плоскость своим основанием, при этом

1) на каждую точку A основания шайбы, соприкасающуюся с плоскостью, действует сила вязкого трения с плотностью

$$\mathbf{f}_{\text{тр}}(A) = -(c_0 + c_1 p_n(A)) \mathbf{v}_A,$$

где $c_0 > 0$, c_1 — постоянные параметры модели вязкого трения, $p_n(A)$ — плотность нормальной реакции в точке A , $\mathbf{v}_A$ — скорость точки A . Параметры модели вязкого трения таковы, что $c_0 + c_1 p_n(A) > 0$;

2) плотность нормальной реакции $p_n(A)$ определяется в рамках динамически совместной модели [6]. Считается, что $p_n(A)$ — линейная функция координат x, y точки A в некоторой декартовой системе координат $Cxyz$ с началом в центре основания шайбы и осью Cz , перпендикулярной опоре:

$$p_n(A) = a_0 + a_1 x + a_2 y, \quad (1.1)$$

где коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 находятся из общих теорем динамики;

3) область контакта совпадает с основанием шайбы, то есть $p_n(A) \geq 0$ для всех точек основания шайбы.

Изучим динамику шайбы в зависимости от параметров модели c_0, c_1 .

2. Уравнения движения

Пусть $OXYZ$ — абсолютная система координат, выбранная таким образом, что ось OZ вертикальна, а плоскость OXY — плоскость, по которой скользит шайба. Применяя общие теоремы динамики, запишем уравнения движения шайбы:

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v}_S = \mathbf{F} + \mathbf{N} + m\mathbf{g}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_S + \mathbf{L}_S. \quad (2.1)$$

Здесь m — масса шайбы, $\mathbf{v}_S$ — скорость ее центра масс S , $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость шайбы, $\mathbf{J}$ — центральный тензор инерции шайбы, $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{N}$ — главные векторы сил трения и нормальных реакций, $\mathbf{M}_S$ и $\mathbf{L}_S$ — главные моменты сил трения и нормальных реакций относительно центра масс S .

Пусть C — центр основания шайбы и $\mathbf{v}_C$ — его скорость. Предполагая, что $\mathbf{v}_C \neq 0$, введем правую подвижную систему координат $Cxyz$ с началом в точке C , ось Cx которой направлена по вектору $\mathbf{v}_C$, ось Cz ортогональна опорной плоскости и направлена вертикально вверх. Обозначим через $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ направляющие векторы подвижной системы координат. Пусть ψ — угол между осями OX и Cx . Тогда угловая скорость подвижной системы координат $Cxyz$ равна $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\mathbf{e}_z$. Шайба совершает плоскопараллельное движение, поэтому $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_C = v\mathbf{e}_x$, $v > 0$. Значит,

$$\dot{\mathbf{v}}_S = \dot{v}\mathbf{e}_x + v\dot{\psi}\mathbf{e}_y.$$

Обозначим через x, y координаты точки A основания шайбы в системе координат $Cxyz$. Скорость точки A равна $\mathbf{v}_A = (v - \omega y)\mathbf{e}_x + \omega x\mathbf{e}_y$. Для главных векторов сил трения и нормальных реакций и для главных моментов этих сил относительно центра масс S имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \iint_{\Sigma} \mathbf{f}_{\text{тр}}(A) d\sigma = F_x\mathbf{e}_x + F_y\mathbf{e}_y, & \mathbf{N} &= \iint_{\Sigma} p_n(x, y)\mathbf{e}_z d\sigma = N\mathbf{e}_z, \\ \mathbf{M}_S &= \iint_{\Sigma} \overrightarrow{SA} \times \mathbf{f}_{\text{тр}}(A) d\sigma = M_x\mathbf{e}_x + M_y\mathbf{e}_y + M_z\mathbf{e}_z, \\ \mathbf{L}_S &= \iint_{\Sigma} \overrightarrow{SA} \times p_n(A)\mathbf{e}_z d\sigma = L_x\mathbf{e}_x + L_y\mathbf{e}_y,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}F_x &= - \iint_{\Sigma} (c_0 + c_1 p_n(x, y))(v - \omega y) dx dy, & F_y &= - \iint_{\Sigma} (c_0 + c_1 p_n(x, y))\omega x dx dy, \\ M_x &= -h \iint_{\Sigma} (c_0 + c_1 p_n(x, y))\omega x dx dy = hF_y, \\ M_y &= h \iint_{\Sigma} (c_0 + c_1 p_n(x, y))(v - \omega y) dx dy = -hF_x, \\ M_z &= - \iint_{\Sigma} (c_0 + c_1 p_n(x, y))(\omega(x^2 + y^2) - vy) dx dy, \\ N &= \iint_{\Sigma} p_n(x, y) d\sigma, & L_x &= \iint_{\Sigma} p_n(x, y)y dx dy, & L_y &= - \iint_{\Sigma} p_n(x, y)x dx dy.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Здесь интегрирование ведется по области контакта Σ (по основанию шайбы), а $2h$ — высота шайбы.

Выпишем уравнения (2.1) в проекциях на оси подвижной системы координат:

$$m\dot{v} = F_x, \quad mv\dot{\psi} = F_y, \quad I_{Cz}\dot{\omega} = M_z,\tag{2.3}$$

$$0 = N - mg, \quad 0 = M_x + L_x, \quad 0 = M_y + L_y,\tag{2.4}$$

где I_{Cz} — момент инерции шайбы относительно оси Cz . Уравнения (2.3) описывают движение шайбы, а уравнения (2.4) позволяют ввести динамически совместную модель нормальных реакций и определить плотность нормальной реакции $p_n(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y$. Обозначим через I_{ij} момент порядка $i + j$ области Σ :

$$I_{ij} = \iint_{\Sigma} x^i y^j dx dy, \quad i, j = 0, 1, 2, 3.$$

Для кольцевой области контакта $\Sigma = \{(x, y): R_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$, где R_0 — внутренний радиус, R — внешний радиус области контакта, имеем

$$I_{Cz} = \frac{mR^2(1 + \lambda^2)}{2}, \quad I_{00} = \pi R^2(1 - \lambda^2), \quad I_{20} = I_{02} = \frac{\pi R^4(1 - \lambda^4)}{4}, \quad \lambda = \frac{R_0}{R},$$

$$I_{10} = I_{01} = 0, \quad I_{11} = 0, \quad I_{30} = I_{21} = I_{12} = I_{03} = 0.$$

Подставляя (1.1) в (2.2), получаем

$$F_x = -(c_0 + c_1 a_0) v I_{00} + c_1 a_2 \omega I_{02}, \quad F_y = -c_1 a_1 \omega I_{20}, \quad N = a_0 I_{00},$$

$$M_x = -h c_1 a_1 \omega I_{20}, \quad M_y = h(c_0 + c_1 a_0) v I_{00} - h c_1 a_2 \omega I_{02},$$

$$M_z = -\omega(c_0 + c_1 a_0)(I_{20} + I_{02}) + c_1 a_2 v I_{02}, \quad L_x = a_2 I_{02}, \quad L_y = -a_1 I_{20}.$$

С учетом этих равенств уравнения (2.4) примут вид

$$a_0 I_{00} - mg = 0, \quad -h c_1 a_1 \omega + a_2 = 0, \quad h(c_0 + c_1 a_0) v I_{00} - h c_1 a_2 \omega I_{02} - a_1 I_{20} = 0.$$

Отсюда имеем

$$a_0 = \frac{mg}{I_{00}}, \quad a_1 = \frac{h(c_0 + c_1 a_0) I_{00} v}{I_{20}(1 + c_1^2 h^2 \omega^2)}, \quad a_2 = h c_1 a_1 \omega = \frac{h^2 c_1 (c_0 + c_1 a_0) I_{00} v \omega}{I_{20}(1 + c_1^2 h^2 \omega^2)}. \quad (2.5)$$

Подставив (2.5) в F_x, F_y, M_z , находим

$$F_x = -\frac{(c_0 + c_1 a_0) I_{00} v}{1 + c_1^2 h^2 \omega^2}, \quad F_y = -\frac{c_1 h (c_0 + c_1 a_0) I_{00} v \omega}{1 + c_1^2 h^2 \omega^2},$$

$$M_z = -(c_0 + c_1 a_0) \omega \left(2I_{20} - \frac{c_1^2 h^2 v^2 I_{00}}{1 + c_1^2 h^2 \omega^2} \right).$$

Тогда уравнения движения (2.3) шайбы принимают вид

$$\dot{v} = -b \frac{v}{1 + \delta^2 w^2}, \quad v \dot{\psi} = -b \delta \frac{v w}{1 + \delta^2 w^2}, \quad \dot{w} = -b w \left(1 - \frac{2\delta^2 v^2}{(1 + \lambda^2)(1 + \delta^2 w^2)} \right). \quad (2.6)$$

Здесь $w = R\omega$, $b = \frac{(c_0 + c_1 a_0) I_{00}}{m}$ и $\delta = \frac{c_1 h}{R}$. Поскольку $c_0 + c_1 p_n(x, y) > 0$ для всех точек основания шайбы, то $c_0 + c_1 a_0 > 0$ и $b > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если основание шайбы — бесконечно тонкое кольцо (окружность), то $I_{Cz} = mR^2$ и $I_{ij} = \int_0^{2\pi} R^{i+j+1} \cos^i \varphi \sin^j \varphi d\varphi$, $i, j = 0, 1, 2, 3$. Тогда

$$I_{00} = 2\pi R, \quad I_{20} = I_{02} = \pi R^3, \quad I_{10} = I_{01} = 0, \quad I_{11} = 0, \quad I_{30} = I_{21} = I_{12} = I_{03} = 0,$$

а уравнения движения имеют вид (2.6), где $\lambda = 1$.

3. Условия корректности модели

Уравнения движения (2.6) шайбы получены в предположении, что область контакта Σ совпадает с основанием шайбы, то есть $p_n(A) \geq 0$ для всех точек основания шайбы. Найдем условие, при котором это предположение выполняется. Согласно (2.5) имеем

$$a_1 = \frac{4h(c_0 + c_1 a_0)v}{R^2(1 + \lambda^2)(1 + \delta^2 w^2)}, \quad a_2 = \delta a_1 w.$$

Используя полярные координаты r, φ ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$), получаем

$$p_n = a_0 + a_1 x + a_2 y = a_0 + a_1 r \cos \varphi + a_2 r \sin \varphi = a_0 + a_1 r \sqrt{1 + \delta^2 w^2} \sin(\varphi + \alpha),$$

где $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2 w^2}}$. Неравенство $p_n \geq 0$ будет выполнено для всех $R_0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, если

$$a_0 - a_1 R \sqrt{1 + \delta^2 w^2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_0 \geq \frac{4h(c_0 + c_1 a_0)v}{R(1 + \lambda^2)\sqrt{1 + \delta^2 w^2}}.$$

Отсюда находим

$$\sqrt{1 + \delta^2 w^2} \geq \frac{4h(c_0 + c_1 a_0)v}{R(1 + \lambda^2)a_0} = \frac{4v}{1 + \lambda^2} \left(\frac{hc_0}{Ra_0} + \delta \right). \quad (3.1)$$

Это неравенство заведомо выполнено, если

$$1 \geq \frac{4v}{1 + \lambda^2} \left(\frac{hc_0}{Ra_0} + \delta \right). \quad (3.2)$$

Ниже будет показано, что $v(t)$ — невозрастающая функция, поэтому если условие (3.2) было выполнено в начальный момент времени, то оно будет выполняться во все последующее время.

Параметры модели вязкого трения таковы, что $c_0 + c_1 p_n(x, y) > 0$ для всех точек основания шайбы. При $c_1 \geq 0$ это условие будет выполнено, если выполняется условие (3.1) неотрицательности плотности нормальной реакции. При $c_1 < 0$ условие

$$c_0 + c_1 p_n = c_0 + c_1 (a_0 + a_1 r \sqrt{1 + \delta^2 w^2} \sin(\varphi + \alpha)) > 0$$

будет выполнено для всех точек основания шайбы, если

$$c_0 + c_1 (a_0 + a_1 R \sqrt{1 + \delta^2 w^2}) = (c_0 + c_1 a_0) \left(1 + \frac{4\delta v}{(1 + \lambda^2)\sqrt{1 + \delta^2 w^2}} \right) > 0.$$

Поскольку $c_0 + c_1 a_0 > 0$, то отсюда при $\delta < 0$ ($c_1 < 0$) получаем условие

$$\sqrt{1 + \delta^2 w^2} > -\frac{4\delta v}{1 + \lambda^2}. \quad (3.3)$$

Таким образом, движение шайбы описывается уравнениями (2.6), при этом должны быть выполнены либо неравенства $-\frac{c_0}{a_0} < c_1 \leq -\frac{c_0}{2a_0}$ и (3.3), либо неравенства $c_1 > -\frac{c_0}{2a_0}$ и (3.1).

4. Свойства движения

Опишем некоторые свойства движения шайбы с круговым основанием ($\lambda = 0$). Для шайбы с кольцевым основанием свойства такие же, однако выкладки менее компактны.

а) Среди движений шайбы есть простые движения, когда $w \equiv 0$ или $v \equiv 0$. В первом случае из (2.6) получаем

$$v(t) = v_0 \exp(-b(t - t_0)), \quad \psi(t) = \psi_0, \quad w(t) \equiv 0.$$

Шайба совершает поступательное движение вдоль прямой, направленной по вектору начальной скорости ее центра масс. Скорость шайбы стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, при этом шайба перемещается на конечное расстояние.

Во втором случае находим

$$v(t) \equiv 0, \quad w(t) = w_0 \exp(-b(t - t_0)).$$

Шайба вращается вокруг своей неподвижной оси симметрии. Угловая скорость шайбы стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, при этом шайба поворачивается на конечный угол. Заметим, что уравнения движения шайбы выводились для случая, когда $\mathbf{v}_C = v\mathbf{e}_x \neq 0$. Однако если центр основания шайбы неподвижен, то все выкладки останутся справедливыми, если в качестве вектора $\mathbf{e}_x$ взять любой постоянный горизонтальный единичный вектор.

б) Пусть $\delta = 0$, то есть высота шайбы равна нулю ($h = 0$) или сила вязкого трения не зависит от плотности нормальной реакции ($c_1 = 0$). В этом случае уравнения (2.6) принимают вид

$$\dot{v} = -bv, \quad v\dot{\psi} = 0, \quad \dot{w} = -bw.$$

Отсюда $v(t) = v_0 \exp(-b(t - t_0))$, $\psi(t) = \psi_0$, $w(t) = w_0 \exp(-b(t - t_0))$. Таким образом, центр масс шайбы движется по прямой. Скорость центра масс стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, при этом он перемещается на конечное расстояние s : $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \frac{v_0}{b}$. Угловая скорость шайбы тоже стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, при этом шайба поворачивается на конечный угол $\Delta\varphi$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta\varphi(t) = \frac{w_0}{Rb}$. Заметим, что величины угловой скорости шайбы и скорости ее центра масс пропорциональны.

в) Пусть $\delta \neq 0$, то есть высота шайбы не равна нулю ($h \neq 0$) и сила вязкого трения зависит от плотности нормальной реакции ($c_1 \neq 0$).

Множество $w \equiv 0$ инвариантно относительно фазового потока, определяемого уравнениями (2.6), поэтому при движении шайбы знак w не меняется. Из (2.6) следует, что $v(t)$ — убывающая функция времени, а $\psi(t)$ — монотонная.

Далее будем считать, что $w > 0$. Если $c_1 > 0$, то $\delta > 0$ и из (2.6) получаем, что $\dot{\psi} < 0$. Значит, траектория центра масс шайбы отклоняется вправо от прямой, направленной по вектору начальной скорости центра масс шайбы. Если $c_1 < 0$, то $\delta < 0$ и из (2.6) получаем, что $\dot{\psi} > 0$. Значит, траектория центра масс шайбы отклоняется влево от прямой, направленной по вектору начальной скорости центра масс шайбы.

Покажем, что $w(t)$ — убывающая функция времени. Из неравенств (3.1) и (3.3) следует, что $1 + \delta^2 w^2 > 16\delta^2 v^2$ при любом δ , поэтому $1 - \frac{2\delta^2 v^2}{1 + \delta^2 w^2} > \frac{7}{8}$. Тогда, согласно (2.6), $\dot{w} < -\frac{7}{8}bw$, поскольку $w > 0$ и $b > 0$. Значит, $\dot{w} < 0$ и $\frac{\dot{w}}{w} < -\frac{7}{8}b$. Отсюда

$w(t) < w_0 \exp\left(-\frac{7}{8}b(t-t_0)\right)$ при $t \geq t_0$. Таким образом, $w(t)$ — убывающая функция времени и $w(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Начиная с некоторого момента времени будет выполняться неравенство $\delta^2 w^2 < 1$, поэтому, согласно (2.6), при больших t имеем $\dot{v} < -\frac{1}{2}bv$. Значит, $v(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

г) Первое и третье уравнения системы (2.6) отделяются

$$\dot{v} = -b \frac{v}{1 + \delta^2 w^2}, \quad \dot{w} = -bw \left(1 - \frac{2\delta^2 v^2}{1 + \delta^2 w^2}\right). \quad (4.1)$$

Примем v за независимую переменную, а $z = \frac{w(v)}{v} = z(v)$ ($z \geq 0$) — за неизвестную функцию. Из (4.1) получаем

$$\frac{dz}{dv} = \delta^2 z(z^2 - 2)v.$$

В области $z > 0$ это уравнение допускает решение $z(v) = \sqrt{2}$. При $z \neq \sqrt{2}$ имеем

$$\left(\frac{z}{z^2 - 2} - \frac{1}{z}\right) dz = 2\delta^2 v dv.$$

Интегрируя это уравнение, находим $\frac{z^2 - 2}{z^2} = K \exp(2\delta^2(v^2 - v_0^2))$. Следовательно, уравнения (4.1) допускают первый интеграл

$$w^2 = \frac{2v^2}{1 - K \exp(2\delta^2(v^2 - v_0^2))}, \quad \text{где } K = \frac{w_0^2 - 2v_0^2}{w_0^2}. \quad (4.2)$$

На рисунке 1 представлены фазовые кривые системы (4.1) на плоскости (v, w) при $\delta \neq 0$. В затемненной области выполняется неравенство $\sqrt{1 + \delta^2 w^2} \geq 4|\delta|v$ (см. (3.1), (3.3)). Если $v_0 \neq 0$ и $w_0 \neq 0$, то при $t \rightarrow +\infty$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{w(t)}{v(t)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - K \exp(-2\delta^2 v_0^2)}}.$$

д) Считая $\psi = \psi(v)$, из (2.6) получаем

$$\frac{d\psi}{dv} = \delta \frac{w}{v}.$$

Если $w = \sqrt{2}v$, то $\psi = \psi_0 + \sqrt{2}\delta(v - v_0)$. Поскольку $v \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то $\psi \rightarrow \psi_0 - \sqrt{2}\delta v_0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Если $w_0 > \sqrt{2}v_0$, то $K = \frac{w_0^2 - 2v_0^2}{w_0^2} > 0$ и, согласно (4.2),

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - K \exp(-2\delta^2 v_0^2)}} < \frac{w}{v} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - K}}. \quad (4.3)$$

Рис. 1. Фазовый портрет системы (4.1) при $\delta \neq 0$.

Следовательно, при $\delta > 0$ имеем

$$\frac{\sqrt{2}\delta}{\sqrt{1 - K \exp(-2\delta^2 v_0^2)}} < \frac{d\psi}{dv} \leq \frac{\sqrt{2}\delta}{\sqrt{1 - K}}.$$

Учитывая, что $0 < v \leq v_0$, отсюда при $\delta > 0$ получаем

$$\frac{\sqrt{2}\delta(v_0 - v)}{\sqrt{1 - K \exp(-2\delta^2 v_0^2)}} \leq \psi_0 - \psi \leq \frac{\sqrt{2}\delta(v_0 - v)}{\sqrt{1 - K}}.$$

Аналогично, при $\delta < 0$ находим

$$\frac{\sqrt{2}\delta(v_0 - v)}{\sqrt{1 - K \exp(-2\delta^2 v_0^2)}} \geq \psi_0 - \psi \geq \frac{\sqrt{2}\delta(v_0 - v)}{\sqrt{1 - K}}.$$

Если $w_0 < \sqrt{2}v_0$, то $K < 0$ и

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - K \exp(-2\delta^2 v_0^2)}} > \frac{w}{v} \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - K}}. \quad (4.4)$$

Тогда при $0 < v \leq v_0$ имеем

$$\frac{\sqrt{2}|\delta|(v_0 - v)}{\sqrt{1 - K \exp(-2\delta^2 v_0^2)}} \geq |\psi_0 - \psi| \geq \frac{\sqrt{2}|\delta|(v_0 - v)}{\sqrt{1 - K}}.$$

Поскольку $v \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то при $t \rightarrow +\infty$ вектор скорости $\mathbf{v}_S$ центра масс шайбы повернется на конечный угол $\Delta\psi = \psi - \psi_0$.

е) Пусть s — натуральный параметр на траектории центра масс шайбы: $\dot{s} = v$. Тогда

$$\frac{ds}{dv} = -\frac{1 + \delta^2 w^2}{b} = -\frac{1}{b} \left(1 + \frac{2\delta^2 v^2}{1 - K \exp(2\delta^2(v^2 - v_0^2))} \right).$$

Используя оценки (4.3) и (4.4), аналогично тому, как это было сделано в пункте д), можно показать, что центр масс S шайбы проходит конечное расстояние при $t \rightarrow +\infty$.

References

- [1] Borisov A. V., Erdakova N. N., Ivanova T. B., Mamaev I. S. On the dynamics of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane, *Nelin. Dinam.*, 2014, vol. 10, no. 4, pp. 483–495 (Russian).
- [2] Borisov A. V., Karavaev Yu. L., Mamaev I. S., Erdakova N. N., Ivanova T. B., Tarasov V. V. Experimental investigation of the motion of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane, *Nelin. Dinam.*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 547–577 (Russian).
- [3] Erdakova N. N., Mamaev I. S. On the dynamics of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane, *Nelin. Dinam.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 521–545 (Russian).
- [4] Zhuravlev V. F. Friction laws in the case of combination of slip and spin, *Mech. Solids*, 2003, vol. 38, no. 4, pp. 52–58; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2003, no. 4, pp. 81–89.
- [5] Ivanov A. P. *Fundamentals of the theory of systems with friction*, Moscow–Izhevsk: R & C Dynamics, Institute of Computer Science, 2011 (Russian).

- [6] Ivanov A. P. A dynamically consistent model of the contact stresses in the plane motion of a rigid body, *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 134–144; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 189–203.
- [7] Ivanov A. P., Shuvalov N. D. On the motion of a heavy body with a circular base on a horizontal plane and riddles of curling, *Nelin. Dinam.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 521–530 (Russian).
- [8] Ishlinsky A. Yu., Sokolov B. N., Chernousko F. L. On motion of flat bodies with friction, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1981, no. 4, pp. 17–28 (Russian).
- [9] Karapetyan A. V., Rusinova A. M. A qualitative analysis of the dynamics of a disc on an inclined plane with friction, *J. Appl. Math. Mech.*, 2011, vol. 75, no. 5, pp. 511–516; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2011, vol. 75, no. 5, pp. 731–737.
- [10] Kireenkov A. A. On the motion of a homogeneous rotating disk along a plane in the case of combined friction, *Mech. Solids*, 2002, vol. 37, no. 1, pp. 47–53; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2002, no. 1, pp. 60–67.
- [11] Rozenblat G. M. On a disk sliding on a rough inclined plane under an arbitrary law of normal stresses, *Mech. Solids*, 2013, vol. 48, no. 5, pp. 573–580; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2013, no. 5, pp. 109–117.
- [12] Sal'nikova T. V., Treshchev D. V., Gallyamov S. R. Motion of a free hollow disk on a rough horizontal plane, *Nelin. Dinam.*, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 83–101 (Russian).
- [13] Treschev D. V., Erdakova N. N., Ivanova T. B. On the final motion of cylindrical solids on a rough plane, *Nelin. Dinam.*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 585–603 (Russian).
- [14] Fedichev O. B., Fedichev P. O. Stopping dynamics of sliding and spinning bodies on a rough plane surface, *Nelin. Dinam.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 549–558 (Russian).

On the motion of a puck on a horizontal plane in the model of viscous friction with variable coefficient

Eugene I. Kugushev¹, Tatiana V. Popova²

^{1,2}Lomonosov Moscow State University

GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia

¹kugushev@keldysh.ru, ²t.shahova@yandex.ru

The problem of the motion of a homogeneous right circular cylinder with an annular base (a puck) on a horizontal plane with viscous friction is considered. Each point of the base of the puck in contact with the plane is acted upon by the viscous friction force which is proportional to the velocity of this point, and the proportionality coefficient linearly depends on the density of the normal reaction at this point. The density of the normal reaction is determined within the framework of a dynamically consistent model. Some properties of the motion are investigated. In particular, it is shown that for a given direction of the initial angular velocity of the puck, the trajectory of the center of mass of the puck can deviate both to the left and to the right of the straight line directed along the vector of the initial velocity of the center of mass depending on the parameters of the viscous friction model.

MSC 2010: 70E18, 70F40

Keywords: puck with annular base, viscous friction, coefficient of friction, dynamically consistent model of normal reactions

Received December 17, 2017, accepted March 12, 2018

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 145–153 (Russian)