ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 539.376
MSC 2010: 74C05

О диффузии жестковязкопластического вихревого слоя

Д. В. Георгиевский

Работа посвящена нахождению параметров нестационарного сдвигового жестковязкопластического течения в начально покоящейся полуплоскости. На границе, начиная с нулевого момента времени, задается постоянное касательное напряжение, превышающее предел текучести. Диффузионно-вихревое решение справедливо в расширяющемся слое с заранее неизвестной границей. Оставшаяся полуплоскость при этом неподвижна. На найденное течение в некоторый момент наложена двумерная картина возмущений, эволюционирующая затем со временем. Построены верхние оценки возмущений скоростей по интегральной мере пространства H_2 . Показано, что в определенном диапазоне параметров задачи оценивающая функция может убывать, достигая точки минимума, а только затем экспоненциально возрастает. Факт ее первоначального убывания интерпретируется как стабилизация основного течения на конечном интервале времени.

Ключевые слова: вязкопластическое тело, жесткая зона, предел текучести, диффузия, вихревой слой, нестационарный сдвиг, возмущение, квадратичный функционал

Получено 27 ноября 2017 года
После доработки 29 декабря 2017 года

Работа выполнена при поддержке Московского фонда перспективных исследований и инноваций (МФПИИ – ФМ087/18).

Георгиевский Дмитрий Владимирович
georgiev@mech.math.msu.su
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

1. Вязкопластическое течение в расширяющемся слое

Рассмотрим в плоскости (Ox_1x_2) нестационарное деформирование несжимаемого жестковязкопластического материала, занимающего при $t \geq 0$ область $\Omega = \{-\infty < x_1 < \infty, x_2 > 0\}$, с плотностью ρ , динамической вязкостью μ и пределом текучести по критерию Мизеса–Генки σ_s . Замкнутая система уравнений относительно двух компонент v_1, v_2 вектора скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и давления $p(\mathbf{x}, t)$ в заранее неизвестной подобласти $\Omega_f(t) \subset \Omega$, где реализуется вязкопластический сдвиг, состоит из двух уравнений движения и условия несжимаемости

$$-p_{,i} + [s_{ij}(\mathbf{v})]_{,j} = \rho \frac{dv_i}{dt}, \quad v_{j,j} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.1)$$

куда надо подставить определяющие соотношения

$$s_{ij} = \frac{\sigma_u(v_u)}{v_u} v_{ij}, \quad \sigma_u = \sigma_s + 2\mu v_u, \quad i, j = 1, 2, \quad (1.2)$$

связывающие девиатор напряжений s_{ij} с тензором скоростей деформаций v_{ij} , а также интенсивности напряжений $\sigma_u = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ и скоростей деформаций $v_u = \sqrt{v_{ij}v_{ij}}$. Кроме того учтем соотношения Стокса

$$v_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}). \quad (1.3)$$

В подобласти $\Omega_f(t)$ реализуется условие $\sigma_u(\mathbf{x}, t) > \sigma_s$. Оставшаяся часть $\Omega_r(t)$ плоскости Ω занята жесткой зоной, в которой: а) существует некоторое распределение напряжений, такое, что $\sigma_u(\mathbf{x}, t) \leq \sigma_s$, б) поле скоростей соответствует движению всей подобласти $\Omega_r(t)$ как жесткого целого (в частном случае — покою).

Остановимся подробнее на одномерном нестационарном сдвиге, характеризуемом напряженно-деформированным состоянием с параметрами

$$v_1 = v^\circ(x, t), \quad v_2 \equiv 0, \quad v_{12} = \frac{v_x^\circ}{2}, \quad v_u = \sqrt{2}|v_{12}| = \frac{|v_x^\circ|}{\sqrt{2}}, \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} s^\circ(x, t) &\equiv s_{12} = \left(\frac{\sigma_s}{v_u} + 2\mu\right)v_{12} = \tau_s \operatorname{sign} v_x^\circ + \mu v_x^\circ, \\ \sigma_u &= \sqrt{2}|s^\circ|, \quad p \equiv p^\circ = \text{const}, \quad v_x^\circ = \frac{\partial v^\circ}{\partial x}, \quad x \equiv x_2, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\tau_s = \sigma_s/\sqrt{2}$ — предел текучести при сдвиге.

Из первого уравнения движения (1.1) и соотношений (1.4), (1.5) следует параболическое уравнение для касательного напряжения $s^\circ(x, t)$:

$$\mathbf{x} \in \Omega_f: \quad \nu s_{xx}^\circ = s_t^\circ, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.6)$$

Зададим начальное и граничные условия

$$\begin{aligned} t = 0: \quad s^\circ &= 0, \\ x = 0: \quad s^\circ &= S_0 = \text{const}, \quad |S_0| > \tau_s, \quad x = \xi(t): \quad |s^\circ| = \tau_s, \end{aligned} \quad (1.7)$$

одно из которых сформулировано на неизвестной границе $\xi(t)$. Тогда

$$\Omega_f = \{-\infty < x_1 < \infty, 0 < x < \xi(t)\}, \quad \Omega_r = \{-\infty < x_1 < \infty, x \geq \xi(t)\}. \quad (1.8)$$

Как известно, начально-краевая задача (1.6), (1.7) допускает в области Ω_f (1.8) автомодельное решение, выражающееся через дополнительную функцию ошибок. Для определенности выберем знаки: $S_0 > \tau_s$, $s^\circ > 0$, $v_x^\circ > 0$. Точное решение при $0 < x < \xi(t)$, $t > 0$ выглядит следующим образом:

$$s^\circ(x, t) = S_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\nu t}} \equiv S_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/(2\sqrt{\nu t})} e^{-\zeta^2} d\zeta \right), \quad (1.9)$$

$$\xi(t) = 2b\sqrt{\nu t}, \quad (1.10)$$

где b — корень уравнения

$$\int_0^b e^{-\zeta^2} d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 - \frac{\tau_s}{S_0} \right). \quad (1.11)$$

Из определяющих соотношений жестковязкопластической среды (1.5) можно найти кинематику сдвига:

$$0 < x < \xi(t), \quad t > 0: \quad v_x^\circ = \frac{1}{\mu} \left(S_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\nu t}} - \tau_s \right), \quad (1.12)$$

$$v^\circ = -\frac{S_0 - \tau_s}{\mu} (\xi(t) - x) + \frac{2S_0}{\sqrt{\pi}\mu} \int_x^{\xi(t)} \int_0^{\tilde{x}/(2\sqrt{\nu t})} e^{-\zeta^2} d\zeta d\tilde{x}. \quad (1.13)$$

В (1.13) учтено граничное условие $v^\circ(\xi(t), t) = 0$, означающее, что жесткая полуплоскость Ω_r (1.8) неподвижна. Из уравнения ее равновесия и непрерывности функции $s^\circ(x, t)$ по x во всей области Ω следует, что в Ω_r надо положить $s^\circ(x, t) \equiv \tau_s$.

Анализ решений (1.9)–(1.13) приводит к следующим выводам:

- единого автомодельного решения $s^\circ \in C^1(\Omega)$ типа (1.9) нет [1]; функция $s^\circ(x, t)$ терпит излом в движущейся точке $x = \xi(t)$;
- так как $v_x^\circ > 0$ в Ω_f и $v^\circ(\xi, t) = 0$, то $v^\circ(x, t) < 0$ в Ω_f ; течение неограниченно разгоняется со временем;
- верхняя грань модуля скорости сдвига, как и касательного напряжения, реализуется при $x = 0$:

$$q(t) \equiv \sup_{0 < x < \xi(t)} |v_x^\circ| = \frac{S_0 - \tau_s}{\mu} = q_0 = \text{const}. \quad (1.14)$$

2. Интегральные оценки развития двумерных возмущений

Исследуем эволюцию во времени плоской картины возмущений $\delta v_i(x_1, x_2, t)$, $\delta s_{ij}(x_1, x_2, t)$, $\delta p(x_1, x_2, t)$, наложенной на основной одномерный нестационарный сдвиг с параметрами (1.9)–(1.13). Пользуясь несжимаемостью, выразим функции δv_i через функцию тока

$$\delta v_1 = (\delta\psi)_{,2}, \quad \delta v_2 = -(\delta\psi)_{,1} \quad (2.1)$$

и представим $\delta\psi$ в виде отдельных гармоник вдоль оси x_1 с волновыми числами $s \geq 0$ и амплитудой $\varphi(x_2, t)$:

$$\delta\psi(x_1, x_2, t) = \varphi(x_2, t) e^{isx_1}. \quad (2.2)$$

Положим, что φ — элемент комплекснозначного гильбертова пространства $H_2(0, \xi(t))$, $t \geq t_0 > 0$, с нормой

$$\|\varphi\|(t) = \left(\int_0^{\xi} |\varphi(x_2, t)|^2 dx_2 \right)^{1/2}. \quad (2.3)$$

Введем в рассмотрение функционал [2]

$$I^2(s, t) = \|\varphi_x\|^2 + s^2 \|\varphi\|^2, \quad (2.4)$$

характеризующий по интегральной мере H_2 в каждый момент времени отклонение скоростей возмущенного движения от основного.

В [3] на базе метода интегральных соотношений, оперирующего вариационными неравенствами для квадратичных функционалов в H_2 , получена (формула (7.6)) верхняя оценка I_2 (2.4), которая в обозначениях публикуемой работы может быть записана в виде

$$I^2(t) \leq I^2(t_0) \exp \int_{t_0}^t \left(q(\tau) - \frac{2\pi^2\nu}{\xi^2(\tau)} + \frac{1}{\tau} \right) d\tau. \quad (2.5)$$

Данная оценка получена в [3] именно для комбинации граничных условий на прямых, ограничивающих Ω_f , которые приняты в публикуемой работе: на одной из границ зоны течения задано касательное напряжение, не меняющееся при переходе от основного течения к возмущенному, а на другой — условие на границе с жесткой зоной.

Прокомментируем наличие в (2.5) отсутствующего в [3] слагаемого $1/\tau$. В [3] оценка развития возмущений выведена в предположении, что каждая из границ области течения либо неподвижна в ортогональном ей направлении, либо движется навстречу другой границе, то есть толщина этой области не возрастает. Это реализуется в основном при торможении течений. В публикуемой же работе одна из границ области Ω_f (прямая $x_2 = 0$) не движется вдоль оси x_2 , а другая (прямая $x_2 = \xi(t)$) удаляется от прямой $x_2 = 0$, что соответствует рассматриваемому здесь разгону течения. Поэтому необходим учет внеинтегральных слагаемых в соотношении (4.5) [3], что после подстановки в $\xi|\varphi_x|^2(\xi, t)/I^2$ функции $\varphi(x_2, t) = \varphi_0 \sin(\pi x_2/\xi(t))$ и преобразований приводит к появлению в (2.5) упомянутого ранее слагаемого $1/\tau$.

Подставим в (2.5) известные из основного течения функции q (1.14) и ξ (1.10). Вычисляя интеграл по t , получим

$$I^2(t) \leq I^2(t_0) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1-\pi^2/(2b^2)} e^{q_0(t-t_0)}, \quad t \geq t_0 > 0. \quad (2.6)$$

Видно, что оценивающая функция времени в (2.6) (множитель при $I^2(t_0)$) экспоненциально возрастает при больших t . Однако этот рост в зависимости от параметров системы может быть монотонным, начиная с момента t_0 , а может и не быть. Анализ на экстремумы показывает, что если

$$1 - \frac{\pi^2}{2b^2} + q_0 t_0 < 0, \quad (2.7)$$

то оценивающая функция имеет минимум в точке

$$t_{\min} = \frac{1}{q_0} \left(\frac{\pi^2}{2b^2} - 1 \right) > t_0, \quad (2.8)$$

равный

$$\min = \left[\frac{1}{q_0 t_0} \left(\frac{\pi^2}{2b^2} - 1 \right) \right]^{1-\pi^2/(2b^2)} \exp \left(\frac{\pi^2}{2b^2} - 1 - q_0 t_0 \right). \quad (2.9)$$

Докажем, что выражение (2.9) при выполнении условия (2.7) меньше единицы. Обозначим $\chi = [\pi^2/(2b^2) - 1]/(q_0 t_0)$, так что $\chi > 1$ согласно (2.7). Доказываемое утверждение сразу следует из несложно устанавливаемого неравенства

$$\chi > e^{1-1/\chi}, \quad \chi > 1.$$

Итак, установлен качественный эффект в развитии двумерной картины возмущений. При условии (2.7) интегральная характеристика возмущений $I^2(t)$ (2.4) убывает от своего значения $I^2(t_0)$ в начальный момент по крайней мере до $I^2(t_*)$ в момент t_* (2.8), что соответствует стабилизации на конечном интервале времени. Неравенство (2.7) фактически реализуется, если b мало, или согласно (1.11) приложенное на границе касательное напряжение S_0 близко (справа) к пределу текучести при сдвиге τ_s . Указанная стабилизация исчезает при $t > t_*$, после чего неравенство (2.6) представляет собой верхнюю оценку экспоненциального роста возмущений, наложенных на неограниченно разгоняющееся основное течение (1.9)–(1.13).

References

- [1] Georgiyevskii D. V. The diffusion of a discontinuity of the shear stress at the boundary of a viscoplastic half-plane, *J. Appl. Math. Mech.*, 2006, vol. 70, no. 5, pp. 796–803; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2006, vol. 70, no. 5, pp. 884–892.
- [2] Kozyrev O. R., Stepanyants Yu. A. *Method of integral relations in the linear theory of hydrodynamical stability*, Moscow: VINITI, 1991, pp. 3–89 (Russian).
- [3] Georgiyevskii D. V. Stability of the nonsteady shear of the Bingham medium in plane layer, *J. Appl. Math. Mech.*, 2018 (in press).

On the diffusion of a rigid viscoplastic vortex layer

Dmitrii V. Georgievskii

Lomonosov Moscow State University,
Leninskie gory 1, Moscow, 119991, Russia
georgiev@mech.math.msu.su

This paper is concerned with obtaining the parameters of a nonsteady shear rigid viscoplastic flow in a half-plane initially at rest. Beginning with the initial time moment, the constant tangent stress exceeding a yield stress is given on the boundary. The diffusion-vortex solution holds true inside an extending layer with an a priori unknown boundary. The remaining half-plane is immovable in this case. A two-dimensional picture of disturbances is imposed on the obtained flow; the picture may then evolve over time. The upper estimates of velocity disturbances by the integral measure of the space H_2 are constructed. It is shown that, in a certain range of parameters, the estimating function may decrease up to some point of minimum and only then increase exponentially. The fact of its initial decrease is interpreted as a stabilization of the main flow on a finite time interval.

MSC 2010: 74C05

Keywords: viscoplastic solid, rigid domain, yield stress, diffusion, vortex layer, nonsteady shear, disturbance, quadratic functional

Received November 27, 2017, accepted December 29, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 63–67 (Russian)