ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.9

MSC 2010: 37K35, 53D22, 70H06

Об одной интегрируемой системе на плоскости с интегралом движения шестой степени по импульсам

А. В. Цыганов

В рамках метода Якоби построена новая интегрируемая система на плоскости с функцией Гамильтона натурального вида и вторым интегралом движения шестой степени по импульсам. Получены переменные разделения, которые являются образом параболических координат на плоскости после автопреобразования Бэклунда, предъявлены разделенные уравнения и доказано, что соответствующее векторное поле бигамильтоново.

Ключевые слова: конечномерные интегрируемые системы, разделение переменных, преобразование Бэклунда

1. Введение

Для систем с двумя степенями свободы на плоскости и сфере известно некоторое соответствие между интегрируемыми гамильтоновыми системами с квадратичными интегралами движения и интегрируемыми системами с интегралами движения старших степеней, которое в работах [4, 6, 9–11] было названо гетеропреобразованием Бэклунда. Таким образом, например, связаны все три интегрируемых случая системы Эно – Хейлеса, три интегрируемых случая системы на плоскости с потенциалом четвертой степени, система Неймана с системой Чаплыгина на сфере и т. д.

Получено 19 октября 2016 года
После доработки 28 декабря 2016 года

Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 15-11-30007.

Цыганов Андрей Владимирович
andrey.tsiganov@gmail.com
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9

Целью данной работы является построение новых интегрируемых систем на плоскости с интегралами движения старших степеней по импульсам с помощью дифференциальных уравнений Абеля, которые естественным образом возникают при интегрировании уравнений Гамильтона–Якоби в параболических координатах на плоскости. В отличие от предыдущих работ для построения уравнений Абеля в этом случае нам необходимо использовать замену времени, аналогичную замене времени, примененной Вейерштрассом для интегрирования уравнений движения в задаче Якоби на эллипсоиде [13]. В силу этого, для построения новых интегрируемых систем на плоскости нам придется использовать дополнительное пуассоново преобразование, связанное с такой заменой времени.

Разрабатываемый в данной работе метод может быть применен для построения новых интегрируемых систем с функцией Гамильтона натурального вида и дополнительными интегралами движения третьей, четвертой и шестой степеней по импульсам на двумерной плоскости, сфере и эллипсоиде. Для построения таких систем используется уравнение Гамильтона–Якоби, допускающее разделение переменных в одной из ортогональных криволинейных систем координат, например эллиптической, параболической, сфероконической системе. Применяя к этому уравнению автопреобразование Бэклунда, сохраняющее форму квадратичных по импульсам интегралов движения, и пуассоново преобразование, отвечающее замене времени приводящей квадратуры Абеля к стандартному виду, можно получить новые канонические переменные разделения на исходном фазовом пространстве. Подставляя эти образы эллиптических, параболических или сфероконических координат в подходящие разделенные уравнения, мы можем построить искомые новые интегрируемые системы с интегралами движения старших степеней по импульсам. Затем, исследуя свойства и общую структуру соответствующих совместных скобок Пуассона, можно понять общие принципы построения подобных скобок Пуассона и применить эти принципы для нахождения переменных разделения для известных в механике систем с интегралами движения старших степеней по импульсам.

2. Система с квадратичными интегралами движения

Рассмотрим интегрируемую систему на плоскости с интегралами движения

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{p_1^2 + p_2^2}{4} + \frac{a}{q_1^2} - \frac{2bq_2}{q_1^4} + \frac{c(q_1^2 + 4q_2^2)}{q_1^6}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \\ H_2 &= -\frac{p_1(p_1q_2 - p_2q_1)}{2} - \frac{2aq_2}{q_1^2} + \frac{b(q_1^2 + 4q_2^2)}{q_1^4} - \frac{4cq_2(q_1^2 + 2q_2^2)}{q_1^6}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Выбор именно этой формы интегралов движения призван максимально упростить форму разделенных уравнений и форму соответствующей алгебраической кривой.

В работе [8] была построена интегрируемая деформация этого гамильтониана при $b = 0$

$$\bar{H}_1 = H + \Delta H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{4} + \frac{a}{q_1^2} + \frac{c(q_1^2 + 4q_2^2)}{q_1^6} + d(q_1^2 + q_2^2) + \frac{e}{q_2^2},$$

для которой второй интеграл движения является полиномом четвертой степени по импульсам.

Исходной целью работы была попытка построить бигамильтонову структуру и переменные разделения для данной интегрируемой деформации исходного гамильтониана (2.1). Однако в процессе работы нам удалось построить другую интегрируемую деформацию исходного гамильтониана с вторым интегралом движения шестой степени по импульсам.

2.1. Разделение переменных

Стационарные уравнения Гамильтона–Якоби $H_{1,2} = h_{1,2}$ допускают разделение переменных на плоскости в параболических координатах

$$u_{1,2} = q_2 \pm \sqrt{q_1^2 + q_2^2},$$

то есть обладают общим полным интегралом вида

$$W(u_1, u_2, h_1, h_2) = W_1(x_1, h_1, h_2) + W_2(x_2, h_1, h_2).$$

В этих переменных гамильтонианы $H_{1,2}$ имеют вид

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{u_1 p_{u_1}^2}{u_1 - u_2} + \frac{u_2 p_{u_2}^2}{u_2 - u_1} - \frac{a}{u_1 u_2} - \frac{b(u_1 + u_2)}{u_1^2 u_2^2} - \frac{c(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2)}{u_1^3 u_2^3}, \\ H_2 &= \frac{u_1 u_2 p_{u_1}^2}{u_2 - u_1} + \frac{u_1 u_2 p_{u_2}^2}{u_1 - u_2} + \frac{a(u_1 + u_2)}{u_1 u_2} + \frac{b(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2)}{u_1^2 u_2^2} + \frac{c(u_1 + u_2)(u_1^2 + u_2^2)}{u_1^3 u_2^3}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

и поэтому легко проверить справедливость разделенных уравнений

$$\Phi(u_i, p_i, H_1, H_2) = (u_i^2 p_{u_i})^2 - (H_1 u_i^4 + H_2 u_i^3 - a u_i^2 - b u_i - c) = 0, \quad (2.3)$$

которые определяют эллиптическую кривую первого рода

$$\mathcal{C}: y^2 = f(x), \quad f(x) = h_1 u^4 + h_2 u^3 - a u^2 - b u - c. \quad (2.4)$$

Переменные

$$x_{1,2} = u_{1,2}, \quad y_{1,2} = u_{1,2}^2 p_{u_{1,2}}$$

можно рассматривать как абсциссы и ординаты двух точек на этой эллиптической кривой на плоскости.

Рассмотрим гамильтоновы уравнения движения для абсцисс $x_{1,2}$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \{u_1, H_1\} = \frac{\partial H_1}{\partial p_{u_1}} = \frac{2y_1}{x_1(x_1 - x_2)}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \{u_2, H_1\} = \frac{\partial H_1}{\partial p_{u_2}} = \frac{2y_2}{x_2(x_2 - x_1)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для вычислений этих уравнений мы использовали выражения для гамильтонианов $H_{1,2}$ (2.2) и скобку Пуассона

$$\{u_i, p_{u_j}\} = \delta_{ij}, \quad \{u_1, u_2\} = \{p_{u_1}, p_{u_2}\} = 0. \quad (2.6)$$

С помощью этих гамильтоновых уравнений можно построить абелевы квадратуры

$$\frac{x_1 dx_1}{y_1} + \frac{x_2 dx_2}{y_2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x_1^2 dx_1}{y_1} + \frac{x_2^2 dx_2}{y_2} = 2dt_1, \quad (2.7)$$

которые затем необходимо разрешить относительно $x_{1,2}$, то есть построить функции $x_{1,2}(t)$ [5].

В работе [13] Вейерштрасс предложил использовать замену времени $t \rightarrow s$ для интегрирования подобных квадратур. Предлагаемая им замена времени эквивалентна замене канонической скобки Пуассона (2.6) на скобку Пуассона

$$\{u_i, p_{u_j}\}_W = u_i^2 \delta_{ij}, \quad \{u_1, u_2\}_W = \{p_{u_1}, p_{u_2}\}_W = 0. \quad (2.8)$$

Таким образом, вместо гамильтоновых уравнений (2.5) Вейерштрасс предложил рассматривать гамильтоновы уравнения

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \{u_1, H_1\}_W = \frac{2x_1y_1}{x_1 - x_2}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \{u_2, H_1\}_W = \frac{2x_2y_2}{x_2 - x_1}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

В соответствующие квадратуры Абеля

$$\frac{dx_1}{x_1y_1} + \frac{dx_2}{x_2y_2} = 0, \quad \frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2} = 2ds_1\tag{2.10}$$

входит стандартный голономный дифференциал в виде $\omega(x, y) = dx/y$ на эллиптической кривой, то есть в виде квадратур Абеля, для которых известно решение задачи обращения.

В следующем разделе мы используем вторую из квадратур Абеля (2.10) для построения дифференциального уравнения Абеля на эллиптической кривой. Решения этого уравнения мы затем будем использовать для построения новых интегрируемых систем на плоскости с интегралами движения старших степеней по импульсам.

2.2. Преобразования Бэклунда и уравнения Абеля

Следуя [14], мы будем использовать следующее определение:

Определение. Автопреобразованием Бэклунда называется преобразование фазового пространства, сохраняющее и форму уравнений Гамильтона, и форму уравнений Гамильтона – Якоби.

На первый взгляд, это определение неконструктивно, так как мы не знаем, как построить подобные преобразования для данной нам интегрируемой системы. Далее мы покажем, что это определение вполне конструктивно, если мы знаем, как интегрировать уравнения движения с помощью квадратур Абеля.

Действительно, предположим, что преобразование переменных

$$\mathcal{B}: (u_1, u_2, p_{u_1}, p_{u_2}) \leftrightarrow (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{p}_{u_1}, \tilde{p}_{u_2})\tag{2.11}$$

сохраняет форму гамильтоновых уравнений (2.9) и форму гамильтонианов, то есть

$$H_1(u, p_u) = h_1 = H_1(\tilde{u}, \tilde{p}_{u_1}), \quad H_2(u, p_u) = h_2 = H_2(\tilde{u}, \tilde{p}_{u_1}),\tag{2.12}$$

где функции $H_{1,2}$ заданы уравнениями (2.2). Это означает, что исходные переменные и их образы удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{x_1y_1} + \frac{dx_2}{x_2y_2} &= 0, & \frac{dx_3}{x_3y_3} + \frac{dx_4}{x_4y_4} &= 0, \\ \frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2} &= 2ds, & \frac{dx_3}{y_3} + \frac{dx_4}{y_4} &= -2ds,\end{aligned}\tag{2.13}$$

где

$$x_{3,4} = \tilde{u}_{1,2}, \quad y_{3,4} = -\tilde{u}_{1,2}^2 \tilde{p}_{u_{1,2}}.$$

Смена знака в определении переменных $y_{3,4}$ по сравнению с $y_{1,2}$ связана с инвариантностью гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$ относительно преобразования $(x, y) \rightarrow (x, -y)$.

Складывая вторые уравнения друг с другом, мы получим дифференциальное уравнение Абеля [2, 3] на эллиптической кривой $\mathcal{C}$ (2.4):

$$\frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2} + \frac{dx_3}{y_3} + \frac{dx_4}{y_4} = 0. \quad (2.14)$$

Согласно основной идее Абеля [1], геометрическая интерпретация которой была предложена позднее Клебшем, решения уравнений типа (2.14) являются точками пересечения кривой $\mathcal{C}$ с вспомогательной кривой на плоскости, которая задается уравнением

$$h(x, y) = -y + P(x) = 0, \quad (2.15)$$

где $P(x)$ — полином второй степени

$$P(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

с коэффициентами, неявно зависящими от t . Исключая эти коэффициенты, можно найти полный интеграл уравнения Абеля

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \\ x_4^2 & x_4 & 1 & y_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.16)$$

Исключая переменную y из уравнений кривых, мы получим полином Абеля, корни которого являются абсциссами точек пересечения

$$\begin{aligned} \psi(x) = f(x) - P(x)^2 &= A(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4), \\ A &= H_1 - b_2^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Таким образом, мы можем явно построить искомое отображение $\mathcal{B}$ (2.11), используя геометрическую связь абсцисс точек пересечения

$$(x - x_3)(x - x_4) = \frac{f(x) - P(x)^2}{A(x - x_1)(x - x_2)}, \quad (2.18)$$

где $f(x)$ имеет вид (2.4), а квадратичный полином $P(x)$ однозначно определяется с помощью интерполяции по Лагранжу

$$P(x) = x \left(\frac{(x - x_2)y_1}{x_1(x_1 - x_2)} + \frac{(x - x_1)y_2}{x_2(x_2 - x_1)} \right), \quad (2.19)$$

если учесть наличие полного интеграла (2.16). Ординаты $y_{3,4}$ точек пересечения

$$y_{3,4} = P(x_{3,4}). \quad (2.20)$$

Теорема 1. Если $\tilde{u}_{1,2}$ — решения уравнения

$$\left(H_1 - \left(\frac{u_1 p_{u_1} - u_2 p_{u_2}}{u_1 - u_2} \right)^2 \right) x^2 - \frac{b u_1 u_2 + c(u_1 + u_2)}{u_1^2 u_2^2} x - \frac{c}{u_1 u_2} = 0$$

и

$$\tilde{p}_{u_{1,2}} = -\tilde{u}_{1,2}^{-2} P \Big|_{x=\tilde{u}_{1,2}}, \quad P(x) = x \left(\frac{(x - u_2) u_1 p_{u_1}}{u_1 - u_2} + \frac{(x - u_1) u_2 p_{u_2}}{u_2 - u_1} \right),$$

то преобразование $\mathcal{B}$ сохраняет форму уравнений Гамильтона (2.9) и алгебраическую форму гамильтонианов $H_{1,2}$ (2.1).

Построенное нами преобразование Бэклунда $\mathcal{B}$ (2.11) сохраняет скобку Пуассона $\{.,.\}_W$ (2.8), относительно которой уравнения движения в форме Вейерштрасса (2.9) являются гамильтоновыми. Значит, если

$$\{u_i, p_{u_j}\}_W = u_i^2 \delta_{ij}, \quad \{u_1, u_2\}_W = \{p_{u_1}, p_{u_2}\}_W = 0,$$

то

$$\{\tilde{u}_i, \tilde{p}_{u_j}\}_W = \tilde{u}_i^2 \delta_{ij}, \quad \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\}_W = \{\tilde{p}_{u_1}, \tilde{p}_{u_2}\}_W = 0.$$

Исходная каноническая скобка Пуассона (2.6) после отображения $\mathcal{B}$ остается совместной со скобкой $\{.,.\}_W$, но при этом имеет весьма сложный вид, например $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\} \neq 0$. Исследование этой скобки выходит за рамки данной работы.

3. Система с интегралом движения шестой степени

В начале своей двадцать шестой лекции в [5], описывая эллиптические координаты, Якоби пишет: «Главная трудность при интегрировании данных дифференциальных уравнений состоит в введении удобных переменных, для разыскания которых нет никакого общего правила. Поэтому мы должны идти обратным путем и, найдя какую-нибудь замечательную подстановку, разыскивать задачи, в которых она может быть с успехом применена».

В данном разделе мы перенесем эту идею Якоби с параболических координат $u_{1,2}$ на их образы $\tilde{u}_{1,2}$, построенные с помощью автопреобразования Бэклунда $\mathcal{B}$. Нахождение новых задач в нашем случае означает поиск новых интегрируемых систем на плоскости, таких, что

- 1) гамильтонианы $\hat{H}_{1,2}$ находятся в инволюции относительно исходной канонической скобки Пуассона (2.6),
- 2) один из гамильтонианов, скажем первый, имеет натуральный вид

$$\hat{H}_1 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} p_i p_j + V(q), \quad (3.1)$$

где g_{ij} — некоторая интегрируемая метрика на плоскости.

Для этого, в рамках метода Якоби, нам необходимо найти новые переменные разделения $\hat{u}_{1,2}$ и $\hat{p}_{u_{1,2}}$ для которых исходная скобка $\{.,.\}$ по-прежнему будет иметь каноническую форму, и затем подставить эти переменные в разделенные уравнения

$$\Phi_1(\hat{u}_1, \hat{p}_{u_1}, \hat{H}_1, \hat{H}_2) = 0, \quad \Phi_2(\hat{u}_2, \hat{p}_{u_2}, \hat{H}_1, \hat{H}_2) = 0,$$

такие, что их решение относительно $\hat{H}_{1,2}$ позволит нам получить гамильтониан натурального вида (3.1).

3.1. Построение канонических переменных

Исходная скобка Пуассона $\{.,.\}$ (2.6) в терминах переменных $\tilde{u}_{1,2}, \tilde{p}_{1,2}$ не является канонической. Поэтому, в отличие от систем на плоскости и сфере, которые были рассмотрены в работах [4, 6, 9–11], нам необходимо построить новые канонические переменные разделения. Для этого достаточно просто заменить p_{u_k} на произведение $u_k^2 p_{u_k}$, то есть использовать пуассоново отображение

$$\rho: (u_1, u_2, p_{u_1}, p_{u_2}) \rightarrow (u_1, u_2, u_1^2 p_{u_1}, u_2^2 p_{u_2}), \quad (3.2)$$

приводящее каноническую скобку Пуассона $\{.,.\}$ к скобке $\{.,.\}_W$, относительно которой уравнения движения в форме Вейерштрасса (2.9) являются гамильтоновыми. Действительно, используя композицию отображений $\mathcal{B}$ и ρ , определим координаты $\hat{u}_{1,2}$ в виде решений уравнения

$$\left(\rho(H_1) - \left(\frac{u_1^3 p_{u_1} - u_2^3 p_{u_2}}{u_1 - u_2} \right)^2 \right) x^2 - \frac{bu_1 u_2 + c(u_1 + u_2)}{u_1^2 u_2^2} x - \frac{c}{u_1 u_2} = 0, \quad (3.3)$$

где

$$\rho(H_1) = \frac{u_1^5 p_{u_1}^2}{u_1 - u_2} + \frac{u_2^5 p_{u_2}^2}{u_2 - u_1} - \frac{a}{u_1 u_2} - \frac{b(u_1 + u_2)}{u_1^2 u_2^2} - \frac{c(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2)}{u_1^3 u_2^3}.$$

Соответствующие импульсы будут иметь вид

$$\hat{p}_{u_{1,2}} = -\hat{u}_{1,2}^{-4} \rho(P) \Big|_{x=\hat{u}_{1,2}}, \quad \rho(P) = x \left(\frac{(x - u_2)u_1^3 p_{u_1}}{u_1 - u_2} + \frac{(x - u_1)u_2^3 p_{u_2}}{u_2 - u_1} \right). \quad (3.4)$$

Непосредственными вычислениями можно доказать следующее свойство новых переменных.

Теорема 2. *Каноническая скобка Пуассона*

$$\{u_i, p_{u_j}\} = \delta_{ij}, \quad \{u_1, u_2\} = \{p_{u_1}, p_{u_2}\} = 0$$

в терминах переменных $\hat{u}_{1,2}$ и $\hat{p}_{1,2}$ (3.3), (3.4) имеет вид

$$\{\hat{u}_i, \hat{p}_{u_j}\} = \delta_{ij}, \quad \{\hat{u}_1, \hat{u}_2\} = \{\hat{p}_{u_1}, \hat{p}_{u_2}\} = 0.$$

Таким образом, мы получили новые канонические переменные, которые можно использовать для построения новых интегрируемых систем на плоскости в рамках метода Якоби.

3.2. Построение интегралов движения

Общего метода выбора разделенных уравнений, которые позволяют построить гамильтонианы натурального вида, не известно. Поэтому далее мы просто воспользуемся конструкцией, предложенной в работах [4, 6, 9–11].

Переменные $u_{1,2}$ и $p_{u_{1,2}}$ удовлетворяют разделенным уравнениям (2.3), которые мы перепишем в виде

$$u_i^{-4} (u_i^4 p_{u_i}^2 + a u_i^2 + b u_i + c) = H_1 + \frac{H_2}{u_i}, \quad i = 1, 2.$$

Складывая и вычитая эти разделенные уравнения, мы получим пару новых квадратичных по импульсам интегралов движения в инволюции относительно исходных канонических скобок Пуассона

$$\begin{aligned} H'_1 &= u_1^{-4} (u_1^4 p_{u_1}^2 + au_1^2 + bu_1 + c) + u_2^{-4} (u_2^4 p_{u_2}^2 + au_2^2 + bu_2 + c) = 2H_1 + \frac{u_1 + u_2}{u_1 u_2} H_2, \\ H'_2 &= u_1^{-4} (u_1^4 p_{u_1}^2 + au_1^2 + bu_1 + c) - u_2^{-4} (u_2^4 p_{u_2}^2 + au_2^2 + bu_2 + c) = \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} H_2. \end{aligned}$$

Первый из этих гамильтонианов $H'_1/2$ можно рассматривать как аддитивную деформацию исходного гамильтониана H_1 .

Переменные $\tilde{u}_{1,2}$ и $\tilde{p}_{u_{1,2}}$ удовлетворяют тем же самым разделенным уравнениям

$$\tilde{u}_i^{-4} (\tilde{u}_i^4 \tilde{p}_{u_i}^2 + a\tilde{u}_i^2 + b\tilde{u}_i + c) = H_1 + \frac{H_2}{\tilde{u}_i}, \quad i = 1, 2,$$

согласно определению автопреобразований Бэклунда. Складывая и вычитая эти разделенные уравнения, мы получим пару новых интегралов движения

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 &= \tilde{u}_1^{-4} (\tilde{u}_1^4 \tilde{p}_{u_1}^2 + a\tilde{u}_1^2 + b\tilde{u}_1 + c) + \tilde{u}_2^{-4} (\tilde{u}_2^4 \tilde{p}_{u_2}^2 + a\tilde{u}_2^2 + b\tilde{u}_2 + c) = 2H_1 + \frac{\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2}{\tilde{u}_1 \tilde{u}_2} H_2, \\ \tilde{H}_2 &= \tilde{u}_1^{-4} (\tilde{u}_1^4 \tilde{p}_{u_1}^2 + a\tilde{u}_1^2 + b\tilde{u}_1 + c) - \tilde{u}_2^{-4} (\tilde{u}_2^4 \tilde{p}_{u_2}^2 + a\tilde{u}_2^2 + b\tilde{u}_2 + c) = \frac{\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1}{\tilde{u}_1 \tilde{u}_2} H_2, \end{aligned}$$

первый из которых является квадратичным полиномом относительно исходных импульсов $p_{u_{1,2}}$, а второй является алгебраической функцией от этих импульсов. Однако эти интегралы движения коммутируют друг с другом относительно скобок Пуассона $\{.,.\}_W$, но не относительно исходной канонической скобки Пуассона $\{.,.\}$, то есть

$$\{\tilde{H}_1, \tilde{H}_2\}_W = 0, \quad \text{но} \quad \{\tilde{H}'_1, \tilde{H}'_2\} \neq 0.$$

Для того чтобы получить искомые интегралы движения в инволюции относительно исходной скобки Дирака–Пуассона, можно использовать дополнительное преобразование ρ (3.2).

Теорема 3. *Интегралы движения*

$$\hat{H}_1 = \left(\hat{u}_1^4 \hat{p}_{u_1}^2 + \frac{a}{\hat{u}_1^2} + \frac{b}{\hat{u}_1^3} + \frac{c}{\hat{u}_1^4} \right) + \left(\hat{u}_2^4 \hat{p}_{u_2}^2 + \frac{a}{\hat{u}_2^2} + \frac{b}{\hat{u}_2^3} + \frac{c}{\hat{u}_2^4} \right) = 2\rho(H_1) + \frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_2}{\hat{u}_1 \hat{u}_2} \rho(H_2)$$

и

$$\hat{H}_2 = \left(\hat{u}_1^4 \hat{p}_{u_1}^2 + \frac{a}{\hat{u}_1^2} + \frac{b}{\hat{u}_1^3} + \frac{c}{\hat{u}_1^4} \right) - \left(\hat{u}_2^4 \hat{p}_{u_2}^2 + \frac{a}{\hat{u}_2^2} + \frac{b}{\hat{u}_2^3} + \frac{c}{\hat{u}_2^4} \right) = \frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1}{\hat{u}_1 \hat{u}_2} \rho(H_2)$$

коммутируют относительно канонической скобки Пуассона (2.6).

Первый гамильтониан имеет натуральный вид

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= \frac{(bu_1 u_2 + c(3u_1 + u_2))u_1^4 p_{u_1}^2}{c(u_1 - u_2)} + \frac{(bu_1 u_2 + c(u_1 + 3u_2))u_2^4 p_{u_2}^2}{c(u_2 - u_1)} - \frac{(bu_1 + c)(au_1^2 + bu_1 + c)}{cu_1^4} - \\ &- \frac{(bu_2 + c)(au_2^2 + bu_2 + c)}{cu_2^4} - \frac{4ac + b^2}{cu_1 u_2} - \frac{5b(u_1 + u_2)}{u_1^2 u_2^2} - \frac{4c(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2)}{u_1^3 u_2^3}, \end{aligned}$$

а квадрат второго является полиномом шестой степени по импульсам:

$$\begin{aligned} \widehat{H}_2^2 = & \left(cu_1^4 u_2^4 (u_1^2 p_{u_1} - u_2^2 p_{u_2})^2 + \right. \\ & \left. + \frac{(u_1 - u_2)^2 \left((3u_1^2 + 2u_1 u_2 + 3u_2^2) c^2 + 2u_1 u_2 (2au_1 u_2 + b(u_1 + u_2)) c - b^2 u_1^2 u_2^2 \right)}{4} \right) \times \\ & \times \left(\frac{u_1^4 p_{u_1}^2 - u_2^4 p_{u_2}^2}{c(u_1 - u_2)^2} - \frac{a(u_1 + u_2)}{cu_1^2 u_2^2 (u_1 - u_2)} - \frac{b(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2)}{cu_1^3 u_2^3 (u_1 - u_2)} - \frac{(u_1 + u_2)(u_1^2 + u_2^2)}{u_1^4 u_2^4 (u_1 - u_2)} \right)^2. \end{aligned}$$

Так как разделенные уравнения имеют вид

$$\Phi_i = 2 \left(\widehat{u}_i^4 \widehat{p}_{u_i}^2 + \frac{a}{\widehat{u}_i^2} + \frac{b}{\widehat{u}_i^3} + \frac{c}{\widehat{u}_i^4} \right) = \widehat{H}_1 + (-1)^i \widehat{H}_2, \quad i = 1, 2,$$

то векторные поля, отвечающие гамильтониану $\widehat{H}_1$ являются бигамильтоновыми. Соответствующая вторая скобка Пуассона, совместная с канонической, имеет вид

$$\{\widehat{u}_i, \widehat{p}_{u_j}\}' = \delta_{ij} \Phi_i, \quad \{\widehat{u}_1, \widehat{u}_2\}' = \{\widehat{p}_{u_1}, \widehat{p}_{u_2}\}' = 0.$$

Эта скобка совместна также со скобкой Пуассона

$$\{\widehat{u}_i, \widehat{p}_{u_j}\}'' = \delta_{ij} \widehat{q}_i, \quad \{\widehat{u}_1, \widehat{u}_2\}'' = \{\widehat{p}_{u_1}, \widehat{p}_{u_2}\}'' = 0,$$

такой, что собственные значения соответствующего оператора рекурсии равны переменным разделения. Изучение этих скобок Пуассона в терминах исходных переменных может помочь в построении переменных разделения для других интегрируемых систем, для которых второй интеграл движения также является полиномом шестой степени по импульсам.

Если сначала положить $a = b$, а затем $c = 0$, то выражения для гамильтонианов H_1 и cH_2^2 упрощаются и мы получаем интегрируемый геодезический поток, для которого второй интеграл движения является кубическим полиномом от импульсов:

$$\widehat{H}_1 = \frac{u_1^4 (3u_1 + u_2) p_{u_1}^2}{u_1 - u_2} + \frac{u_2^4 (u_1 + 3u_2) p_{u_2}^2}{u_2 - u_1}, \quad \widehat{H}_2 = \frac{u_1^2 u_2^2 (u_1^2 p_{u_1} - u_2^2 p_{u_2})^2 (u_1^2 p_{u_1} + u_2^2 p_{u_2})}{(u_1 - u_2)^2}.$$

В исходных декартовых переменных эти интегралы имеют вид

$$\widehat{H}_1 = \frac{(q_1^2 + 6q_2^2) q_1^2 p_1^2}{2} + (5q_1^2 + 12q_2^2) q_1 q_2 p_1 p_2 + \frac{(q_1^4 + 8q_1^2 q_2^2 + 12q_2^4) p_2^2}{2}$$

и

$$\widehat{H}_2 = \frac{q_1^7 q_2 p_1^3}{4} + \frac{q_1^6 (q_1^2 + 6q_2^2) p_1^2 p_2}{4} + q_1^5 q_2 (q_1^2 + 3q_2^2) p_1 p_2^2 + q_1^4 (q_1^2 + 2q_2^2) q_2^2 p_2^3.$$

Легко проверить, что полиномиального интеграла второго порядка по импульсам у этого геодезического потока нет.

Кубический по импульсам интеграл движения $\widehat{H}_2$ является произведением полиномов первого и второго порядка. Поэтому рассмотрим движение по геодезическим

$$T = \sum_{i,j=1}^2 \widehat{g}_{ij}^{(km)}(u) p_{u_i} p_{u_j}$$

с метрикой

$$\widehat{g}^{(km)} = \begin{pmatrix} \frac{(ku_1 + u_2)u_1^m}{u_1 - u_2} & 0 \\ 0 & \frac{(ku_2 + u_1)u_2^m}{u_2 - u_1} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

для которого второй интеграл движения имеет похожую структуру:

$$K = (u_1^2 p_{u_1} - u_2^2 p_{u_2}) \cdot (f(u_1, u_2) p_{u_1}^2 + g(u_1, u_2) p_{u_1} p_{u_2} + h(u_1, u_2) p_{u_2}^2).$$

Подставляя эти выражения в уравнение $\{T, K\} = 0$ и решая соответствующую систему дифференциальных уравнений относительно функций от $u_{1,2}$ и параметров k, m , мы легко докажем следующее утверждение.

Теорема 4. *Метрика $\widehat{g}_{km}$ (3.5) порождает интегрируемые геодезические потоки на плоскости, если $m = 1$, $k = 2$, или*

$$m = 3, \quad k = \pm 1, 3, \frac{1}{2}, \quad \text{или} \quad m = 4, \quad k = \pm 1, \pm 3, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}.$$

Некоторые из этих интегрируемых систем являются суперинтегрируемыми.

Механического смысла у полученных нами интегрируемых систем нет, но исследование таких систем может помочь в нахождении бигамильтоновых структур и переменных разделения для других интегрируемых систем с интегралами движения старших степеней по импульсам, более интересных с точки зрения физики. Кроме этого, подобные нестандартные гамильтоновы системы иногда возникают в других областях исследований, например в радиофизике, сейсмологии, биологии, оптоэлектронике, механике жидкостей, и т. д.

Вместо уравнений Гамильтона – Якоби, отвечающих гамильтонианам $H_{1,2}$ (2.1), для построения новых интегрируемых систем можно взять другие уравнения Гамильтона – Якоби, допускающие разделение переменных в параболических координатах и интегрируемые с помощью квадратур Абеля на эллиптической кривой или гиперэллиптической кривой второго рода. Полная классификация всех систем с интегралами движения старших степеней на плоскости, полученных предложенным методом, выходит за рамки данной работы.

References

- [1] Abel N.H. Mémoire sur une propriété géénérale d’une class très éntendue des fonctions transcendentes, in *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel: Vol. 1*, L. Sylow, S. Lie (Eds.), Christiania: Grondahl & Son, 1881, pp. 145–211.
- [2] Baker H.F. *Abelian functions: Abel’s theorem and the allied theory of theta functions*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
- [3] Green M.L., Griffiths Ph.A. Abel’s differential equations, *Houston J. Math.*, 2002, vol. 28, no. 2, pp. 329–351.
- [4] Grigoryev Yu. A., Sozonov A. P., Tsiganov A. V. On an integrable system on the plane with velocity-dependent potential, *Nelin. Dinam.*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 355–367 (Russian).
- [5] Jacobi C. G. J. *Vorlesungen über Dynamik*, 2nd ed., Berlin: Reimer, 1884.
- [6] Sozonov A. P., Tsiganov A. V. Bäcklund transformations relating different Hamilton – Jacobi equations, *Theoret. and Math. Phys.*, 2015, vol. 183, no. 3, pp. 768–781; see also: *Teoret. Mat. Fiz.*, 2015, vol. 183, no. 3, pp. 372–387.

- [7] Suris Yu. B. *The problem of integrable discretization: Hamiltonian approach*, Progr. Math., vol. 219, Boston, Mass.: Birkhäuser, 2003.
- [8] Tsiganov A. V. Killing tensors with nonvanishing Haantjes torsion and integrable systems, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 4, pp. 463–475.
- [9] Tsiganov A. V. Simultaneous separation for the Neumann and Chaplygin systems, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 1, pp. 74–93.
- [10] Tsiganov A. V. On the Chaplygin system on the sphere with velocity dependent potential, *J. Geom. Phys.*, 2015, vol. 92, pp. 94–99.
- [11] Tsiganov A. V. On auto and hetero Bäcklund transformations for the Hénon – Heiles systems, *Phys. Lett. A*, 2015, vol. 379, nos. 45–46, pp. 2903–2907.
- [12] Veselov A. P. Integrable maps, *Russian Math. Surveys*, 1991, vol. 46, no. 5, pp. 1–51; see also: *Uspekhi Mat. Nauk*, 1991, vol. 46, no. 5, pp. 3–45.
- [13] Weierstrass K. Über die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid, in *Mathematische Werke: Vol. 1*, Berlin: Mayer & Müller, 1894, pp. 257–266.
- [14] Wojciechowski S. The analogue of the Bäcklund transformation for integrable many-body systems, *J. Phys. A*, 1982, vol. 15, no. 12, L653–L657.

On an integrable system on a plane with an integral of motion of sixth order in momenta

Andrey V. Tsiganov

Saint-Petersburg State University

Universitetskaya nab. 7-9, St. Petersburg, 199034, Russia

andrey.tsiganov@gmail.com

In the framework of the Jacobi method we obtain a new integrable system on the plane with a natural Hamilton function and a second integral of motion which is a polynomial of sixth order in momenta. The corresponding variables of separation are images of usual parabolic coordinates on the plane after a suitable Bäcklund transformation. We also present separated relations and prove that the corresponding vector field is bi-Hamiltonian.

MSC 2010: 37K35, 53D22, 70H06

Keywords: finite-dimensional integrable systems, separation of variables, Bäcklund transformations

Received October 19, 2016, accepted December 28, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 1, pp. 117–127 (Russian)