УДК: 531.36:521.1

MSC 2010: 70H08, 70H12, 70H14, 70H15, 70M20

О периодических движениях неавтономной гамильтоновой системы в одном случае кратного параметрического резонанса

О. В. Холостова

Рассматриваются движения неавтономной периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия. Предполагается, что гамильтониан системы зависит от двух параметров ε и α , причем параметр ε мал и при $\varepsilon = 0$ система автономна. Предполагается также, что при $\varepsilon = 0$ для некоторых значений α одна из частот малых линейных колебаний системы в окрестности положения равновесия является целым или полуцелым числом, а другая равна нулю, то есть в системе реализуется кратный параметрический резонанс. Рассмотрен случай, когда ранг матрицы линеаризованных при $\varepsilon = 0$ в окрестности положения равновесия уравнений возмущенного движения равен трем. При достаточно малых (но отличных от нуля) ε для значений α , близких к резонансным, решен вопрос о существовании, бифуркациях и устойчивости (в линейном приближении) периодических движений системы. В качестве приложения для случаев кратных резонансов рассматриваемого типа построены периодические движения симметричного спутника в окрестности его цилиндрической прецессии на слабоэллиптической орбите.

Ключевые слова: гамильтонова система, кратный параметрический резонанс, периодические движения, устойчивость, цилиндрическая прецессия спутника

Получено 19 сентября 2017 года

После доработки 07 ноября 2017 года

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

Холостова Ольга Владимировна

kholostova_o@mail.ru

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

125993, Россия, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское ш., д. 4

Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет)

141701, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

Содержание

1. Постановка задачи	478
2. Преобразование гамильтониана. Модельные гамильтонианы	479
2.1. Нормализация гамильтониана при $\varepsilon = 0$	480
2.2. Нормализация квадратичной части гамильтониана при $\varepsilon \neq 0$	480
2.3. Модельные гамильтонианы	483
3. Резонансные периодические движения системы	484
3.1. Положения равновесия модельных систем при нечетных n	484
3.2. Положения равновесия модельных систем при четных n	492
3.3. Резонансные периодические движения	494
4. Резонансные периодические движения симметричного спутника в окрестности цилиндрической прецессии	495
4.1. Точка P_1	496
4.2. Точка P_2	498
4.3. Точка P_3	501

1. Постановка задачи

Рассмотрим движения неавтономной 2π -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Пусть система зависит от двух параметров ε и α , причем параметр ε мал ($0 < \varepsilon \ll 1$) и при $\varepsilon = 0$ система автономна. Предполагаем, что гамильтониан системы аналитичен по этим параметрам и при достаточно малых значениях ε представляется в виде ряда

$$H = H^{(0)}(q_j, p_j, \alpha) + \varepsilon H^{(1)}(q_j, p_j, t, \alpha) + \varepsilon^2 H^{(2)}(q_j, p_j, t, \alpha) + O(\varepsilon^3), \quad (1.1)$$

где q_j и p_j ($j = 1, 2$) — канонически сопряженные координаты и импульсы.

Пусть начало координат $q_j = p_j = 0$ фазового пространства — положение равновесия системы. В его окрестности гамильтониан (1.1) аналитичен по q_j, p_j , а функции $H^{(k)}$ записываются в виде рядов, содержащих слагаемые только четных степеней по координатам и импульсам:

$$H^{(k)} = H_{2k} + H_{4k} + \dots \quad (k = 0, 1, 2). \quad (1.2)$$

Здесь H_{lk} ($l = 2, 4$) — совокупности слагаемых степени l по q_j и p_j с постоянными (при $k = 0$) или 2π -периодическими по времени (при $k = 1, 2, \dots$) коэффициентами. Многоточие в (1.2) означает совокупность слагаемых не менее шестой степени по q_j и p_j .

Пусть при $\varepsilon = 0$ в некотором диапазоне изменения параметра α рассматриваемое положение равновесия устойчиво в линейном приближении, корни $\pm i\omega_j(\alpha)$ ($j = 1, 2$) характеристического многочлена линеаризованных уравнений возмущенного движения чисто мнимые.

При достаточно малых, но отличных от нуля значениях ε в плоскости параметров (ε, α) появляются области неустойчивости (области параметрического резонанса). Порождающими для них при $\varepsilon = 0$ являются такие точки $(0, \alpha_0)$, в которых реализуется резонанс второго порядка (параметрический резонанс), означающий, что частоты $\omega_j(\alpha_0)$ ($j = 1, 2$) удовлетворяют условию

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = N, \quad |k_1| + |k_2| = 2, \quad (1.3)$$

где k_1, k_2 и N — целые числа.

Подробное исследование устойчивости положений равновесия линейных гамильтоновых систем при наличии параметрического резонанса в случаях, когда выполняется только одно резонансное соотношение вида (1.3), проведено в [1].

В недавних работах [2–4] (см. также монографию [5]) рассмотрены случаи кратных параметрических резонансов. Установлено, что, в зависимости от типа резонанса и коэффициентов нормализованной квадратичной части гамильтониана возмущенного движения, из порождающей точки может выходить одна, две или три области параметрического резонанса. Такие области были построены при исследовании ряда задач динамики спутника (твёрдого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле.

Наличие резонансов существенно меняет свойства фазового пространства системы в окрестности резонансной точки. В частности, появляются новые периодические движения, меняется характер условно-периодических движений. В случае параметрического резонанса движения близкой к автономной гамильтоновой системы с одной степенью свободы изучены ранее в работах [6–8]. Резонансные периодические движения в системе с двумя степенями свободы при однократном параметрическом резонансе основного типа рассмотрены в статье [9].

Цель данной работы — исследование периодических движений системы с гамильтонианом (1.1), (1.2) в случаях двойного параметрического резонанса вида

$$2\omega_1 = n, \quad \omega_2 = 0, \quad (1.4)$$

где n — целое число ($n \neq 0$). Соответствующие значения $\alpha = \alpha_0$ лежат на границе области устойчивости в линейном приближении рассматриваемого тривиального равновесия системы. При этом ранг r матрицы линеаризованных при $\varepsilon = 0$ в окрестности положения равновесия уравнений возмущенного движения может быть равен двум или трем. В работе рассматривается случай $r = 3$, чаще встречающийся в приложениях.

В последнем разделе работы построены периодические движения динамически симметричного спутника в окрестности его цилиндрической прецессии на слабоэллиптической орбите в случаях кратных резонансов рассматриваемого типа.

2. Преобразование гамильтониана.

Модельные гамильтонианы

Пусть при $\varepsilon = 0$, $\alpha = \alpha_0$ в системе с гамильтонианом (1.1), (1.2) выполнены соотношения (1.4). В плоскости параметров (ε, α) рассмотрим малую окрестность точки $(0, \alpha_0)$, полагая

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon\mu_1 + \varepsilon^2\mu_2 + \varepsilon^3\mu_3 + \dots \quad (\mu_j = \text{const}). \quad (2.1)$$

Тогда гамильтониан (1.1), (1.2) может быть переписан в виде

$$H = H_2 + H_4 + \dots, \quad H_4 = H_{40}(\alpha_0) + O(\varepsilon), \quad (2.2)$$

$$H_2 = H_{20}(\alpha_0) + \varepsilon[\mu_1 H'_{20}(\alpha_0) + H_{21}(t, \alpha_0)] + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{2} \mu_2 H''_{20}(\alpha_0) + \mu_1 H'_{21}(t, \alpha_0) + H_{22}(t, \alpha_0) \right] + O(\varepsilon^3). \quad (2.3)$$

В формулах (2.3) опущены аргументы q_j, p_j , а штрих означает дифференцирование по параметру α . Будем предполагать, что $\overline{H_{21}(t, \alpha_0)} = 0$. Здесь и далее черта означает среднее за период (по времени) значение стоящей под ней функции.

Осуществим ряд канонических преобразований, упрощающих структуру гамильтониана (2.2), (2.3) в слагаемых до четвертого порядка включительно по q_j, p_j ($j = 1, 2$) с учетом имеющегося резонанса.

2.1. Нормализация гамильтониана при $\varepsilon = 0$

Рассмотрим сначала автономную (при $\varepsilon = 0$) часть гамильтониана (2.2), (2.3). Осуществим линейное унивалентное каноническое преобразование $q_j, p_j \rightarrow \tilde{q}_j, \tilde{p}_j$ ($j = 1, 2$), приводящее квадратичную часть $H_{20}(\alpha_0)$ к нормальной форме вида

$$\tilde{H}_{20} = \frac{\delta_1 \omega_1}{2} (\tilde{q}_1^2 + \tilde{p}_1^2) + \frac{\delta_2}{2} \tilde{p}_2^2. \quad (2.4)$$

Коэффициенты δ_1 и δ_2 в (2.4) могут принимать значения $+1$ или -1 , в зависимости от конкретной задачи. Без ограничения общности далее будем считать, что $\delta_2 = 1$, чего всегда можно добиться, сделав каноническую (с валентностью -1) замену $\tilde{q}_j$ на $-\tilde{q}_j$ ($j = 1, 2$).

Выполним затем близкую к тождественной каноническую замену переменных $\tilde{q}_j, \tilde{p}_j \rightarrow \hat{q}_j, \hat{p}_j$ ($j = 1, 2$), упрощающую структуру формы четвертой степени $\tilde{H}_{40}$. Эта замена может быть получена, например, методом Депри – Хори [10]. В результате нормализованный при $\varepsilon = 0$ гамильтониан возмущенного движения принимает вид

$$\hat{H}^{(0)} = \frac{\sigma_1}{2} (\hat{q}_1^2 + \hat{p}_1^2) + \frac{1}{2} \hat{p}_2^2 + \frac{c_{20}}{4} (\hat{q}_1^2 + \hat{p}_1^2)^2 + \frac{c_{11}}{2} (\hat{q}_1^2 + \hat{p}_1^2) \hat{q}_2^2 + c_{02} \hat{q}_2^4 + \dots, \quad (2.5)$$

где введено обозначение $\sigma_1 = \delta_1 \omega_1$, а $c_{ij} = \text{const}$. Многоточие означает совокупность слагаемых не ниже шестой степени по $\hat{q}_j, \hat{p}_j$.

2.2. Нормализация квадратичной части гамильтониана при $\varepsilon \neq 0$

Проведем теперь нормализацию квадратичной части гамильтониана при $\varepsilon \neq 0$. Результат будем представлять в виде

$$K_2 = K_{20} + \varepsilon K_{21} + \varepsilon^2 K_{22} + \varepsilon^3 K_{23} + \dots \quad (2.6)$$

Рассмотрим сначала слагаемые порядка ε . Пусть в результате описанного в разделе 2.1 линейного преобразования функции $H'_{20}(\alpha_0)$ и $H_{21}(t, \alpha_0)$ из (2.3) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \tilde{H}'_{20}(\alpha_0) &= a_1 \tilde{q}_1^2 + a_2 \tilde{q}_2^2 + a_3 \tilde{p}_1^2 + a_4 \tilde{p}_2^2 + a_5 \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 + a_6 \tilde{q}_1 \tilde{p}_1 + a_7 \tilde{q}_1 \tilde{p}_2 + a_8 \tilde{q}_2 \tilde{p}_1 + a_9 \tilde{q}_2 \tilde{p}_2 + a_{10} \tilde{p}_1 \tilde{p}_2, \\ \tilde{H}_{21}(t, \alpha_0) &= b_1 \tilde{q}_1^2 + b_2 \tilde{q}_2^2 + b_3 \tilde{p}_1^2 + b_4 \tilde{p}_2^2 + b_5 \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 + b_6 \tilde{q}_1 \tilde{p}_1 + b_7 \tilde{q}_1 \tilde{p}_2 + b_8 \tilde{q}_2 \tilde{p}_1 + b_9 \tilde{q}_2 \tilde{p}_2 + b_{10} \tilde{p}_1 \tilde{p}_2, \end{aligned}$$

где a_k — постоянные коэффициенты, а $b_k(t)$ — 2π -периодические функции времени ($\overline{b_k(t)} = 0$).

Осуществим в гамильтониане преобразование поворота по первой паре переменных:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= \cos(\sigma_1 t) x_1 + \sin(\sigma_1 t) X_1, & \tilde{q}_2 &= x_2, \\ \tilde{p}_1 &= -\sin(\sigma_1 t) x_1 + \cos(\sigma_1 t) X_1, & \tilde{p}_2 &= X_2. \end{aligned}$$

Это унивалентное T -периодическое по времени каноническое преобразование. Период T равен 2π или 4π для случаев четного или нечетного n в резонансном соотношении (1.4).

В результате в гамильтониане (2.5) исчезает часть $\sigma_1(\tilde{q}_1^2 + \tilde{p}_1^2)/2$, а остальные слагаемые с точностью до обозначений переменных не изменяются.

Сделаем в преобразованном гамильтониане линейное, близкое к тождественному (и отличающегося от него слагаемыми порядка ε), T -периодическое по времени каноническое преобразование $x_j, X_j \rightarrow \tilde{x}_j, \tilde{X}_j$, уничтожающее время t в слагаемых порядка ε квадратичной части гамильтониана. Это преобразование может быть также получено методом Депри–Хори. Результат представляется в виде

$$K_{21} = (\mu_1\gamma_1 - \beta_1)\tilde{x}_1^2 + (\mu_1\gamma_1 + \beta_1)\tilde{X}_1^2 + \beta_2\tilde{x}_1\tilde{X}_1 + \mu_1(a_2\tilde{x}_2^2 + a_4\tilde{X}_2^2 + a_9\tilde{x}_2\tilde{X}_2) + (\beta_3\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \beta_4\tilde{x}_1\tilde{X}_2 + \beta_5\tilde{x}_2\tilde{X}_1 + \beta_6\tilde{X}_1\tilde{X}_2), \quad (2.7)$$

где, как показывают расчеты,

$$\gamma_1 = \frac{a_1 + a_3}{2},$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{2}(-\overline{[b_1(t) - b_3(t)] \cos 2\sigma_1 t} + \overline{b_6(t) \sin 2\sigma_1 t}), & \beta_2 &= \overline{[b_1(t) - b_3(t)] \sin 2\sigma_1 t} + \overline{b_6(t) \cos 2\sigma_1 t}, \\ \beta_3 &= \overline{b_5(t) \cos \sigma_1 t} - \overline{b_8(t) \sin \sigma_1 t}, & \beta_4 &= \overline{b_7(t) \cos \sigma_1 t} - \overline{b_{10}(t) \sin \sigma_1 t}, \\ \beta_5 &= \overline{b_5(t) \sin \sigma_1 t} + \overline{b_8(t) \cos \sigma_1 t}, & \beta_6 &= \overline{b_7(t) \sin \sigma_1 t} + \overline{b_{10}(t) \cos \sigma_1 t}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.2.1. Случай нечетных n

Если величина n нечетна, то, как следует из (2.8), часть коэффициентов квадратичной формы K_{21} обнуляется: $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$. Форма упрощается до шести слагаемых

$$K_{21} = (\mu_1\gamma_1 - \beta_1)\tilde{x}_1^2 + \beta_2\tilde{x}_1\tilde{X}_1 + (\mu_1\gamma_1 + \beta_1)\tilde{X}_1^2 + \mu_1(a_2\tilde{x}_2^2 + a_4\tilde{X}_2^2 + a_9\tilde{x}_2\tilde{X}_2)$$

и состоит из двух независимых групп, содержащих только свои пары сопряженных переменных $\tilde{x}_j, \tilde{X}_j$ ($j = 1, 2$).

Близкая к тождественной унивалентная каноническая замена

$$\tilde{x}_1 = y_1, \quad \tilde{X}_1 = Y_1, \quad \tilde{x}_2 = y_2 + \varepsilon\mu_1 a_4 y_2 + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{X}_2 = Y_2 - \varepsilon\mu_1(a_9 y_2 + a_4 Y_2) + O(\varepsilon^2)$$

упрощает вторую группу до одного слагаемого:

$$K_{21} = (\mu_1\gamma_1 - \beta_1)y_1^2 + \beta_2 y_1 Y_1 + (\mu_1\gamma_1 + \beta_1)Y_1^2 + \mu_1 a_2 y_2^2. \quad (2.9)$$

Рассмотрим, в частности, случай, когда функции $b_j(t)$ содержат только первые гармоники $\sin t$ и $\cos t$ в их разложениях в ряды Фурье. Тогда коэффициенты β_1 и β_2 отличны от нуля только при $n = 1$ ($\omega_1 = 1/2$). В случаях $n = 3, 5, \dots$ ($\omega_1 = 3/2, 5/2, \dots$) имеем $\beta_1 = \beta_2 = 0$, тогда

$$K_{21} = \mu_1\gamma_1(y_1^2 + Y_1^2) + \mu_1 a_2 y_2^2. \quad (2.10)$$

Если $\mu_1 = 0$, то проводится нормализация квадратичной части в слагаемых порядка ε^2 . Действуя аналогично предыдущему, получаем (за переменными оставляем прежние обозначения)

$$K_{21} = 0, \quad K_{22} = (\mu_2\gamma_1 - \xi_1)(y_1^2 + Y_1^2) + (\mu_2 a_2 - \xi_2)y_2^2. \quad (2.11)$$

Здесь ξ_1, ξ_2 — константы, явный вид которых не приводим.

Из соотношения (2.11) определяем две бифуркационные точки $\mu'_2 = \xi_1/\gamma_1$ и $\mu''_2 = \xi_2/a_2$, для которых нормализация квадратичной части должна быть продолжена. В случае $\mu_2 = \mu'_2$ получаем (η_1, η_2 — константы)

$$K_{21} = 0, \quad K_{22} = (\mu'_2 a_2 - \xi_2)y_2^2, \quad K_{23} = (\mu_3\gamma_1 - \eta_1)y_1^2 + (\mu_3\gamma_1 + \eta_1)Y_1^2 + (\mu_3 a_2 - \eta_2)y_2^2. \quad (2.12)$$

Если $n = 3$, то нормализация квадратичной части завершена. Если же $n = 5, 7, \dots$, то $\eta_1 = 0$; действуя аналогично, проводим нормализацию квадратичной части до слагаемых порядка ε^n включительно.

При $\mu_2 = \mu_2''$ имеем (η_1', η_2' — константы)

$$\begin{aligned} K_{21} &= 0, & K_{22} &= (\mu_2''\gamma_1 - \xi_1)(y_1^2 + Y_1^2), \\ K_{23} &= (\mu_3\gamma_1 - \eta_1')y_1^2 + (\mu_3\gamma_1 + \eta_1')Y_1^2 + (\mu_3a_2 - \eta_2')y_2^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.2.2. Случаи четных n

В случаях четных значений n форму (2.7) можно несколько упростить, выполнив близкое к тождественному каноническое преобразование вида

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= y_1 + \varepsilon\beta_6y_2 + O(\varepsilon^2), & \tilde{x}_2 &= y_2 + \varepsilon\mu_1a_4y_2 + O(\varepsilon^2), \\ \tilde{X}_1 &= Y_1 - \varepsilon\beta_4y_2 + O(\varepsilon^2), & \tilde{X}_2 &= Y_2 - \varepsilon[\mu_1(a_9y_2 + a_4Y_2) + \beta_4y_1 + \beta_6Y_1] + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

В результате получаем

$$K_{21} = (\mu_1\gamma_1 - \beta_1)y_1^2 + (\mu_1\gamma_1 + \beta_1)Y_1^2 + \beta_2y_1Y_1 + \mu_1a_2y_2^2 + \beta_3y_1y_2 + \beta_5y_2Y_1. \quad (2.14)$$

Вновь рассмотрим случай, когда функции $b_j(t)$ содержат только первые гармоники $\sin t$ и $\cos t$. Тогда, как следует из формул (2.8), $\beta_1 = \beta_2 = 0$ и

$$K_{21} = \mu_1\gamma_1(y_1^2 + Y_1^2) + \mu_1a_2y_2^2 + \beta_3y_1y_2 + \beta_5y_2Y_1. \quad (2.15)$$

В случае $n = 2$ ($\omega_1 = 1$) сделаем (при $\beta = \sqrt{\beta_3^2 + \beta_5^2} \neq 0$) еще одну унивалентную каноническую замену $y_j, Y_j \rightarrow \tilde{y}_j, \tilde{Y}_j$ ($j = 1, 2$) по формулам

$$y_1 = \frac{\beta_3}{\beta} \tilde{y}_1 - \frac{\beta_5}{\beta} \tilde{Y}_1, \quad Y_1 = \frac{\beta_5}{\beta} \tilde{y}_1 + \frac{\beta_3}{\beta} \tilde{Y}_1, \quad y_2 = \tilde{y}_2, \quad Y_2 = \tilde{Y}_2.$$

Опуская знаки тильды, запишем преобразованную форму (2.15) в виде

$$K_{21} = \mu_1\gamma_1(y_1^2 + Y_1^2) + \mu_1a_2y_2^2 + \beta y_1y_2. \quad (2.16)$$

В случаях $n = 4, 6, \dots$ ($\omega_1 = 2, 3, \dots$) коэффициенты β_3 и β_5 в (2.15) равны нулю (см. формулы (2.8)) и K_{21} имеет вид (2.10). При $\mu_1 = 0$ проводится нормализация в слагаемых порядка ε^2 ; структура результата такова (ξ_1, ξ_2, ξ_3 — константы):

$$K_{21} = 0, \quad K_{22} = (\mu_2\gamma_1 - \xi_1)(y_1^2 + Y_1^2) + \xi_3y_1y_2 + (\mu_2a_2 - \xi_2)y_2^2. \quad (2.17)$$

При $n = 4$ процесс нормализации квадратичной части гамильтониана заканчивается. В случаях $n = 6, 8, \dots$ нормализация проводится аналогичным образом в слагаемых до порядка $\varepsilon^{n/2}$ включительно.

2.2.3. Об областях параметрического резонанса

Пусть в квадратичной форме проведена нормализация в слагаемых до порядка ε^k включительно ($k = n$ и $k = n/2$ для случаев нечетных и четных n соответственно). Отбрасывая в (2.6) слагаемые порядка ε^{k+1} и выше, получим гамильтониан, соответствующий линейной автономной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы.

Характеристическое уравнение этой системы биквадратное:

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0, \quad (2.18)$$

его коэффициенты зависят от параметров задачи. При выполнении условий

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d = a^2 - 4b > 0$$

корни уравнения (2.18) чисто мнимые и тривиальное положение равновесия линейной системы устойчиво. Границы области устойчивости и неустойчивости определяются условиями

$$a \geq 0, \quad b = 0 \quad \text{или} \quad a \geq 0, \quad d = 0. \quad (2.19)$$

В плоскости параметров (ε, α) граничные кривые задаются соотношениями вида (2.1) при некоторых значениях $\mu_1 = \mu_1^*, \mu_2 = \mu_2^*, \dots$, обеспечивающих выполнение соотношений (2.19). Техника построения граничных кривых описана в [4, 5]. Для целей данной работы достаточно найти уравнения этих кривых до наименьшей по ε степени (равной k), при которой происходит их «расщепление».

2.3. Модельные гамильтонианы

Полученный в результате нормализации полный гамильтониан возмущенного движения имеет вид

$$K = K_2 + K_4 + \dots, \quad K_2 = K_{20} + K'_2 + O(\varepsilon^{k+1}), \quad K_4 = K_{40} + O(\varepsilon), \quad (2.20)$$

$$K_{20} = \frac{1}{2} Y_2^2, \quad K'_2 = \sum_{l=1}^k \varepsilon^l K_{2l}, \quad K_{40} = \frac{c_{20}}{4} (y_1^2 + Y_1^2)^2 + \frac{c_{11}}{2} (y_1^2 + Y_1^2) y_2^2 + c_{02} y_2^4.$$

Нормализованные квадратичные формы из K'_2 определяются формулами из раздела 2.2. Многоточие означает совокупность слагаемых не менее шестой степени по y_j, Y_j с T -периодическими по времени коэффициентами.

В случае $k = 1$ ($n = 1$ или $n = 2$) перейдем в малую, порядка $\varepsilon^{1/2}$, окрестность начала координат фазового пространства, полагая

$$y_j = \varepsilon^{1/2} z_j, \quad Y_j = \varepsilon^{1/2} Z_j \quad (j = 1, 2).$$

Гамильтониан (2.20) перепишется в виде

$$\tilde{\Gamma}^{(1)} = \Gamma^{(1)} + O(\varepsilon^2), \quad \Gamma^{(1)} = \Gamma_{20} + \varepsilon(\Gamma_{21} + \Gamma_{40}). \quad (2.21)$$

Здесь и далее Γ_{ij} — это формы K_{ij} из (2.20), в которых сделана замена $y_j = z_j, Y_j = Z_j$ ($j = 1, 2$). Для названных резонансных случаев приближенный гамильтониан $\Gamma^{(1)}$ будем называть модельным. Слагаемое $O(\varepsilon^2)$ в (2.21) T -периодично по времени и аналитично по малому параметру ε и переменным z_j, Z_j ($j = 1, 2$).

В случае $k = 2$ ($n = 4$) на граничных кривых областей параметрического резонанса имеем $\mu_1 = 0$ (см. раздел 2.2). При $\mu_1 \neq 0$, как и в предыдущем случае, исследование

проводится в $\varepsilon^{1/2}$ -окрестности начала координат и гамильтониан системы приводится к виду (2.21). При $\mu_1 = 0$ следует перейти в меньшую (порядка ε) окрестность начала координат, полагая

$$y_j = \varepsilon z_j, \quad Y_j = \varepsilon Z_j \quad (j = 1, 2)$$

и получая в результате гамильтониан

$$\tilde{\Gamma}^{(2)} = \Gamma^{(2)} + O(\varepsilon^3), \quad \Gamma^{(2)} = \Gamma_{20} + \varepsilon^2(\Gamma_{22} + \Gamma_{40}), \quad (2.22)$$

в котором формы Γ_{ij} определяются при помощи (2.17). Модельными для данного случая будут гамильтонианы $\Gamma^{(1)}$ (при $\mu_1 \neq 0$) и $\Gamma^{(2)}$ (при $\mu_1 = 0$). Слагаемое $O(\varepsilon^3)$ T -периодично по времени и аналитично по ε, z_j, Z_j .

Рассмотрим случай $k = 3$ и $n = 3$. На граничных кривых областей параметрического резонанса имеем $\mu_1 = 0$, а $\mu_2 = \mu'_2$ или $\mu_2 = \mu''_2$ (см. раздел 2.2), расщепление границ происходит для первого варианта ($\mu_2 = \mu'_2$) в слагаемых порядка ε^3 . Исследование проводится в три этапа. При $\mu_1 \neq 0$ рассматривается $\varepsilon^{1/2}$ -окрестность начала координат и модельный гамильтониан $\Gamma^{(1)}$. При $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 \neq \mu'_2, \mu''_2$ осуществляется переход в ε -окрестность и изучается модельная система с гамильтонианом $\Gamma^{(2)}$ (см. формулы (2.22) и (2.11)). В случаях $\mu_1 = 0, \mu_2 = \mu'_2$ или $\mu_2 = \mu''_2$ следует перейти в окрестность ширины $\sim \varepsilon^{3/2}$ при помощи преобразования

$$y_j = \varepsilon^{3/2} z_j, \quad Y_j = \varepsilon^{3/2} Z_j \quad (j = 1, 2).$$

Имеем в этом случае

$$\tilde{\Gamma}^{(3)} = \Gamma^{(3)} + O(\varepsilon^4), \quad \Gamma^{(3)} = \Gamma_{20} + \varepsilon^2\Gamma_{22} + \varepsilon^3(\Gamma_{23} + \Gamma_{40}), \quad (2.23)$$

причем при $\mu_2 = \mu'_2$ формы Γ_{ij} модельного гамильтониана $\Gamma^{(3)}$ получаются из соотношений (2.12), а в случае $\mu_2 = \mu''_2$ — из (2.13). Слагаемое $O(\varepsilon^4)$ T -периодично по времени и аналитично по ε, z_j, Z_j .

Для случая $k = 3$ и $n = 6$, а также для случаев $k \geq 4$ процедура построения модельных гамильтонианов аналогична.

3. Резонансные периодические движения системы

Решим вопрос о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении) периодических движений систем с гамильтонианами $\tilde{\Gamma}^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$), вычисленными по формулам (2.21), (2.22), (2.23). На первом этапе будем исследовать отличные от тривиального положения равновесия соответствующих им модельных систем.

3.1. Положения равновесия модельных систем при нечетных n

3.1.1. Случай $n = 1$

Рассмотрим сначала случай $n = 1$ и модельную систему с гамильтонианом $\Gamma^{(1)}$ из (2.21), вычисленным с учетом соотношений (2.20) и (2.9). Считаем, что коэффициенты β_1 и β_2 отличны от нуля.

Условия устойчивости в линейном приближении тривиального положения равновесия системы задаются неравенствами

$$\mu_1 a_2 > 0, \quad |\mu_1| > \mu_{1*} = \frac{\beta_*}{2|\gamma_1|}, \quad \beta_* = \sqrt{4\beta_1^2 + \beta_2^2}.$$

Окрестность резонансной точки $(0, \alpha_0)$ (в плоскости параметров (ε, α)) состоит из области устойчивости и области неустойчивости, разделенных граничной кривой вида $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon \mu_{1*} \operatorname{sign} a_2 + \dots$

Для определения других положений равновесия системы приравняем к нулю частные производные модельного гамильтониана по z_j, Z_j ($j = 1, 2$):

$$\frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial z_j} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial Z_j} = 0 \quad (j = 1, 2).$$

Отсюда получим, что $Z_2 = 0$, а величины z_1, z_2, Z_1 удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} z_2 [4c_{02}z_2^2 + 2a_2\mu_1 + c_{11}(z_1^2 + Z_1^2)] &= 0, \\ 2z_1(\mu_1\gamma_1 - \beta_1) + \beta_2 Z_1 + c_{20}z_1(z_1^2 + Z_1^2) + c_{11}z_1z_2^2 &= 0, \\ 2Z_1(\mu_1\gamma_1 + \beta_1) + \beta_2 z_1 + c_{20}Z_1(z_1^2 + Z_1^2) + c_{11}Z_1z_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Перечислим решения системы (3.1) и исследуем характер устойчивости отвечающих им положений равновесия.

1. Если $\mu_1 a_2 c_{02} < 0$, то существуют два решения системы (3.1) вида

$$z_1 = 0, \quad Z_1 = 0, \quad z_2^2 = -\frac{\mu_1 a_2}{2c_{02}}. \quad (3.2)$$

Введем в гамильтониане $\Gamma^{(1)}$ возмущение z_2' переменной z_2 относительно ее равновесных значений из (3.2), оставив без изменения обозначения для остальных переменных, и запишем квадратичную часть гамильтониана возмущенного движения (одинаковую для обоих решений):

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = \frac{1}{2} Z_2^2 - 2\varepsilon \mu_1 a_2 z_2'^2 + \varepsilon \left[-\frac{\mu_1 (c_{11}a_2 - 4c_{02}\gamma_1) + 4c_{02}\beta_1}{4c_{02}} z_1^2 + \right. \\ \left. + \beta_2 z_1 Z_1 - \frac{\mu_1 (c_{11}a_2 - 4c_{02}\gamma_1) - 4c_{02}\beta_1}{4c_{02}} Z_1^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отсюда находим, что положения равновесия (3.2) устойчивы в линейном приближении при выполнении условий

$$\mu_1 a_2 < 0, \quad (c_{11}a_2 - 4c_{02}\gamma_1)^2 \mu_1^2 > 4c_{02}^2 \beta_*^2.$$

Первое из этих неравенств в области существования положения равновесия сводится к условию $c_{02} > 0$. Второе неравенство есть условие отрицательности дискриминанта стоящего в квадратных скобках выражения в (3.3).

2. При $c_{20}(2\mu_1\gamma_1 + \beta_*) < 0$ в системе имеются два положения равновесия, для которых

$$z_2 = 0, \quad z_1^2 = -\frac{\beta_2^2 (2\mu_1\gamma_1 + \beta_*)}{2c_{20}\beta_* (2\beta_1 + \beta_*)}, \quad Z_1 = \frac{2\beta_1 + \beta_*}{\beta_2} z_1. \quad (3.4)$$

Аналогично, при $c_{20}(2\mu_1\gamma_1 - \beta_*) < 0$ имеются еще два равновесия

$$z_2 = 0, \quad z_1^2 = \frac{\beta_2^2 (2\mu_1\gamma_1 - \beta_*)}{2c_{20}\beta_* (2\beta_1 - \beta_*)}, \quad Z_1 = \frac{2\beta_1 - \beta_*}{\beta_2} z_1. \quad (3.5)$$

Структура квадратичной части гамильтониана возмущенного движения для этих решений совпадает со структурой (3.3). При этом для решения (3.4) коэффициент при z_2^2

равен $-\varepsilon[2\mu_1(c_{11}\gamma_1 - c_{20}a_2) + c_{11}\beta_*]/(2c_{20})$, а дискриминант группы слагаемых с индексами 1 равен $-4\varepsilon^2\beta_*(2\mu_1\gamma_1 + \beta_*)$. Для решения (3.5) в этих выражениях надо заменить на противоположные знаки перед β_* .

Отсюда находим, что условия устойчивости (в линейном приближении) для решения (3.4), с учетом области существования, имеют вид

$$c_{20} < 0, \quad 2\mu_1(c_{11}\gamma_1 - c_{20}a_2) + c_{11}\beta_* > 0,$$

а для решения (3.5) — вид

$$c_{20} > 0, \quad -2\mu_1(c_{11}\gamma_1 - c_{20}a_2) + c_{11}\beta_* > 0.$$

3. В системе имеется четверка положений равновесия

$$z_1^2 = \frac{\beta_*^2[\mu_1(c_{11}a_2 - 4c_{02}\gamma_1) - 2c_{02}\beta_*]}{\beta_*(2\beta_1 + \beta_*)(4c_{20}c_{02} - c_{11}^2)},$$

$$Z_1 = \frac{2\beta_1 + \beta_*}{\beta_2} z_1, \quad z_2^2 = \frac{2\mu_1(c_{11}\gamma_1 - c_{20}a_2) + c_{11}\beta_*}{4c_{20}c_{02} - c_{11}^2},$$

если одного знака будут три величины —

$$4c_{20}c_{02} - c_{11}^2, \quad \mu_1(c_{11}a_2 - 4c_{02}\gamma_1) - 2c_{02}\beta_*, \quad 2\mu_1(c_{11}\gamma_1 - c_{20}a_2) + c_{11}\beta_*.$$

Еще одна четверка равновесий описывается теми же соотношениями, но в них знаки перед слагаемыми с β_* изменены на противоположные.

Для первой из указанных четверок коэффициенты характеристического уравнения линейризованных уравнений возмущенного движения таковы:

$$a = \frac{8\varepsilon c_{02}[2\mu_1(c_{11}\gamma_1 - c_{20}a_2) + c_{11}\beta_*]}{4c_{20}c_{02} - c_{11}^2} + O(\varepsilon^2),$$

$$b = \frac{16\varepsilon^3[-\mu_1(c_{11}a_2 - 4c_{02}\gamma_1) + 2c_{02}\beta_*][2\mu_1(c_{11}\gamma_1 - c_{20}a_2) + c_{11}\beta_*]\beta_*}{4c_{20}c_{02} - c_{11}^2}.$$

Отсюда, учитывая область существования, находим условия устойчивости в линейном приближении: $c_{02} > 0$, $4c_{20}c_{02} - c_{11}^2 < 0$. Аналогичные условия для второй четверки равновесий таковы: $c_{02} > 0$, $4c_{20}c_{02} - c_{11}^2 > 0$.

Соотношения из пунктов 2 и 3 теряют смысл, если коэффициент β_2 обращается в нуль. При $\beta_2 = 0$ перепишем их следующим образом.

2'. Система (3.1) имеет при $c_{20}(\mu_1\gamma_1 + \beta_1) < 0$ два решения вида

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad Z_1^2 = -\frac{2(\mu_1\gamma_1 + \beta_1)}{c_{20}}, \quad (3.6)$$

устойчивые в линейном приближении при выполнении условий

$$c_{20}[\mu_1(c_{11}\gamma_1 - c_{20}a_2) + \beta_1 c_{11}] < 0, \quad \beta_1(\mu_1\gamma_1 + \beta_1) > 0.$$

Еще два решения вида

$$Z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_1^2 = \frac{2(\beta_1 - \mu_1\gamma_1)}{c_{20}} \quad (3.7)$$

существуют при $c_{20}(\beta_1 - \mu_1\gamma_1) > 0$, условия их устойчивости таковы:

$$c_{20}[-\mu_1(c_{11}\gamma_1 - c_{20}a_2) + \beta_1 c_{11}] > 0, \quad \beta_1(\mu_1\gamma_1 - \beta_1) < 0.$$

3'. Если величины

$$4c_{20}c_{02} - c_{11}^2, \quad \mu_1(c_{11}a_2 - 4c_{02}\gamma_1) - 4c_{02}\beta_1, \quad \mu_1(c_{11}\gamma_1 - c_{20}a_2) + \beta_1 c_{11}$$

одного знака, то имеется четверка решений, для которой $z_1 = 0$, а

$$Z_1^2 = \frac{2\mu_1(c_{11}a_2 - 4c_{02}\gamma_1) - 8c_{02}\beta_1}{4c_{20}c_{02} - c_{11}^2}, \quad z_2^2 = \frac{2\mu_1(c_{11}\gamma_1 - c_{20}a_2) + 2\beta_1 c_{11}}{4c_{20}c_{02} - c_{11}^2},$$

соответствующие равновесия устойчивы при $c_{02} > 0$, $\beta_1(4c_{20}c_{02} - c_{11}^2) < 0$.

Для второй четверки решений z_1 и Z_1 меняются местами и во всех соотношениях меняются на противоположные знаки перед β_1 .

Из приведенного анализа следует, что в окрестности резонансной точки в системе могут существовать, помимо тривиального, еще от нуля до четырнадцати положений равновесия. При переходе через значение $\mu_1 = 0$ появляются (или исчезают) положения равновесия (3.2), а при переходе через точки $\mu_1 = \pm\mu_{1*}$ появляется (или исчезает) одна из пар точек, описываемых соотношениями (3.4) или (3.5) (в случае $\beta_2 = 0$ соотношениями (3.7) или (3.6)).

Смена характера устойчивости равновесных точек из пунктов 1 и 2 (или 2') может произойти при $\mu_1 = \pm\mu'_1$ и $\mu_1 = \pm\mu''_1$, где

$$\mu'_1 = \frac{2|c_{02}|\beta_*}{|c_{11}a_2 - 4c_{02}\gamma_1|} \quad \text{и} \quad \mu''_1 = \frac{|c_{11}|\beta_*}{2|c_{11}\gamma_1 - c_{20}a_2|}.$$

При переходе через эти значения параметра μ_1 могут появиться (или исчезнуть) положения равновесия, описанные в пункте 3 (или 3').

Взаимное расположение величин μ_{1*} , μ'_1 и μ''_1 , картина распределения положений равновесия системы в окрестности резонансной точки и характер их устойчивости зависят от знаков и конкретных значений коэффициентов формы (2.9) и формы K_{40} из (2.20).

3.1.2. Случай $n = 3$

Рассмотрим теперь случай $n = 3$. При сделанных в разделе 2.2 предположениях $\beta_1 = \beta_2 = 0$ и форма K_{21} имеет вид (2.10).

Первое приближение. Пусть сначала $\mu_1 \neq 0$. Рассмотрим модельную систему с гамильтонианом $\Gamma^{(1)}$ из (2.21) (при учете соотношений (2.20), (2.10)). Тривиальное равновесие этой системы устойчиво в линейном приближении при $a_2\mu_1 > 0$ и неустойчиво при $a_2\mu_1 < 0$.

В модельной системе имеется первый интеграл $z_1^2 + Z_1^2 = 2c = \text{const}$. Перейдем по первой паре переменных к симплектическим полярным координатам Φ_1, R_1 по формулам $z_1 = \sqrt{2R_1} \sin \Phi_1$, $Z_1 = \sqrt{2R_1} \cos \Phi_1$. Координата Φ_1 в преобразованном гамильтониане циклическая и $R_1 = c$. Отбрасывая аддитивные постоянные, рассмотрим приведенную систему с одной степенью свободы с гамильтонианом

$$\gamma^{(1)} = \frac{1}{2} Z_2^2 + \varepsilon(\mu_1 a_2 + c c_{11}) z_2^2 + \varepsilon c_{02} z_2^4. \quad (3.8)$$

Положение равновесия $z_2 = 0$, $Z_2 = 0$ системы с гамильтонианом (3.8) устойчиво в линейном приближении при условии $\mu_1 a_2 + c c_{11} > 0$ и неустойчиво при $\mu_1 a_2 + c c_{11} < 0$.

Если выполнено условие $(\mu_1 a_2 + c c_{11}) c_{02} < 0$, то в системе имеются еще два положения равновесия, описываемые соотношениями

$$z_2^2 = -\frac{\mu_1 a_2 + c c_{11}}{2c_{02}}, \quad Z_2 = 0, \quad (3.9)$$

устойчивые в линейном приближении в области существования при $c_{02} > 0$ и неустойчивые при $c_{02} < 0$.

Фазовые портреты системы с гамильтонианом (3.8) изображены на рисунке 1 для случаев $\mu_1 a_2 + c c_{11} > 0$, $c_{02} > 0$ (а), $\mu_1 a_2 + c c_{11} > 0$, $c_{02} < 0$ (б), $\mu_1 a_2 + c c_{11} < 0$, $c_{02} > 0$ (с), $\mu_1 a_2 + c c_{11} < 0$, $c_{02} < 0$ (д). Устойчивым положениям равновесия соответствуют особые точки типа центр, неустойчивым — седловые особые точки. Траектории, отличные от особых точек, отвечают либо колебаниям в окрестности устойчивых равновесий, либо неограниченным движениям, либо асимптотическим движениям (движениям по сепаратрисам).

Рис. 1. Фазовые портреты приведенной системы с одной степенью свободы.

В модельной системе с двумя степенями свободы с гамильтонианом $\Gamma^{(1)}$ существуют, при условии $\mu_1 a_2 c_{02} < 0$, два положения равновесия

$$z_1 = 0, \quad Z_1 = 0, \quad z_2^2 = -\frac{\mu_1 a_2}{2c_{02}}, \quad Z_2 = 0, \quad (3.10)$$

соответствующие решениям (3.9) при $c = 0$. Если $c_{02} > 0$, то эти равновесия существуют и устойчивы (в линейном приближении) при $\mu_1 a_2 < 0$, то есть в области неустойчивости

тривиального равновесия. Если же $c_{02} < 0$, то, наоборот, равновесия (3.10) существуют и неустойчивы в области устойчивости тривиального равновесия. В случае $c_{11}a_2 = -4\gamma_1 c_{02}$ равновесия (3.10) являются сложными особыми точками системы.

Кроме того, при условии $\mu_1\gamma_1 c_{20} < 0$ в системе с гамильтонианом $\Gamma^{(1)}$ имеется семейство неустойчивых положений равновесия (сложных особых точек), образующих окружность в плоскости переменных (z_1, Z_1) :

$$z_1^2 + Z_1^2 = -\frac{2\mu_1\gamma_1}{c_{20}}, \quad z_2 = 0, \quad Z_2 = 0.$$

Далее, если коэффициенты нормальной формы гамильтониана $\Gamma^{(1)}$ таковы, что величины $c_{11}a_2 - 4c_{02}\gamma_1$, $c_{11}\gamma_1 - c_{20}a_2$, $4c_{20}c_{02} - c_{11}^2$ одного знака, то в системе существуют еще два симметричных семейства неустойчивых положений равновесия (сложных особых точек). Эти семейства соответствуют решениям (3.9) при

$$c = c_* = \frac{\mu_1(c_{11}a_2 - 4c_{02}\gamma_1)}{4c_{20}c_{02} - c_{11}^2}$$

и задаются соотношениями

$$z_1^2 + Z_1^2 = 2c_*, \quad z_2^2 = \frac{2\mu_1(c_{11}\gamma_1 - c_{20}a_2)}{4c_{20}c_{02} - c_{11}^2}, \quad Z_2 = 0.$$

Если общий знак трех указанных выше величин положительный, то эти семейства существуют в области $\mu_1 > 0$, а если знак отрицательный — в области $\mu_1 < 0$.

Второе приближение. Пусть теперь $\mu_1 = 0$. Рассмотрим модельную систему с гамильтонианом $\Gamma^{(2)}$ из (2.22) (при учете соотношений (2.20) и (2.11)). Тривиальное положение равновесия модельной системы устойчиво в линейном приближении при выполнении условий $\mu_2 a_2 > \xi_2$ и $\mu_2 \neq \mu'_2$; при $\mu_2 = \mu'_2$ оно является сложной особой точкой.

Анализ модельной системы проводится аналогично первому этапу. В системе остается первый интеграл $z_1^2 + Z_1^2 = 2c = \text{const}$. Гамильтониан приведенной системы с одной степенью свободы отличается от (3.8) заменой ε на ε^2 и $\mu_1 a_2$ на $\mu_2 a_2 - \xi_2$, поэтому качественно поведение двух систем совпадает.

Положения равновесия изучаемой модельной системы также качественно не отличаются от найденных при рассмотрении первого приближения.

1. Два положения равновесия

$$z_1 = 0, \quad Z_1 = 0, \quad z_2^2 = -\frac{\mu_2 a_2 - \xi_2}{2c_{02}}, \quad Z_2 = 0 \quad (3.11)$$

существуют при условии $(\mu_2 a_2 - \xi_2)c_{02} < 0$. Они устойчивы в линейном приближении или неустойчивы при выполнении, соответственно, условий $\mu_2 a_2 - \xi_2 < 0$ (при $c_{02} > 0$) или $\mu_2 a_2 - \xi_2 > 0$ (при $c_{02} < 0$), то есть в области неустойчивости или устойчивости тривиального равновесия.

Если

$$\mu_2 = \frac{c_{11}\xi_2 - 4c_{02}\xi_1}{c_{11}a_2 - 4c_{02}\gamma_1},$$

то эти равновесия являются сложными особыми точками системы.

2. Семейство неустойчивых сложных особых точек

$$z_1^2 + Z_1^2 = -\frac{2(\mu_2\gamma_1 - \xi_1)}{c_{20}}, \quad z_2 = 0, \quad Z_2 = 0$$

существует при условии $(\mu_2\gamma_1 - \xi_1)c_{20} < 0$.

3. Два симметричных семейства неустойчивых сложных особых точек

$$z_1^2 + Z_1^2 = \frac{2[\mu_2(c_{11}a_2 - 4c_{02}\gamma_1) + 4c_{02}\xi_1 + c_{11}\xi_2]}{4c_{20}c_{02} - c_{11}^2},$$

$$z_2^2 = \frac{2c_{02}(c_{11}\gamma_1 - c_{20}a_2)\mu_2 - 2c_{11}c_{02}\xi_1 + 2c_{20}c_{02}\xi_2 - c_{11}^2\xi_2}{(4c_{20}c_{02} - c_{11}^2)c_{02}}, \quad Z_2 = 0,$$

существуют, если стоящие в правых частях этих выражений дроби неотрицательны.

Третье приближение. Из соотношений (2.12) и (2.13) следует, что уравнения граничных кривых, при переходе через которые может измениться характер устойчивости тривиального положения равновесия системы, с точностью до слагаемых порядка ε^3 включительно имеют вид

$$\alpha_{1,2} = \alpha_0 + \varepsilon^2\mu'_2 \pm \varepsilon^3\mu'_3, \quad \alpha_3 = \alpha_0 + \varepsilon^2\mu''_2 + \varepsilon^3\mu''_3, \quad \mu'_3 = \frac{\eta_1}{\gamma_1}, \quad \mu''_3 = \frac{\eta'_2}{a_2}.$$

Если $\mu'_2 = \mu''_2$, то различие в уравнениях всех трех граничных кривых проявляется в слагаемых порядка ε^3 . При этом имеем (см. (2.12) или (2.13)) $K_{21} = K_{22} = 0$, а форма K_{23} совпадает с формой K_{21} из (2.9), если в последней положить $\beta_2 = 0$ и заменить μ_1 на μ_3 , β_1 на η_1 и μ_1a_2 на $\mu_2a_2 - \eta_2$. При $\eta_2 = 0$ результаты исследования модельной системы с такой структурой нормализованной квадратичной части с точностью до обозначений повторяют результаты раздела 3.1.1, а при $\eta_2 \neq 0$ могут быть получены аналогичным образом. Далее будем рассматривать случай $\mu'_2 \neq \mu''_2$.

В модельной системе с гамильтонианом $\Gamma^{(3)}$, определяемым формулами (2.23), (2.20), (2.13) и отвечающим случаю $\mu_2 = \mu''_2$, тривиальное положение равновесия устойчиво в линейном приближении при условии $\mu_3a_2 > \eta'_2$. Если выполняется неравенство $c_{02}(\mu_3a_2 - \eta'_2) < 0$, то в системе имеются два положения равновесия

$$z_1 = 0, \quad Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0, \quad z_2^2 = -\frac{\mu_3a_2 - \eta'_2}{2c_{02}}, \quad (3.12)$$

соответствующие решениям (3.10) и (3.11). Они существуют и устойчивы в линейном приближении, если $c_{02} > 0$ и $\mu_3a_2 < \eta'_2$; если же $c_{02} < 0$, то они существуют и неустойчивы при $\mu_3a_2 > \eta'_2$.

В модельной системе с гамильтонианом $\Gamma^{(3)}$, определяемом формулами (2.23), (2.20), (2.12) и отвечающим случаю $\mu_2 = \mu'_2$, тривиальное положение равновесия устойчиво в линейном приближении при выполнении неравенств $(\xi_1a_2 - \xi_2\gamma_1)\gamma_1 > 0$, $\mu_3^2\gamma_1^2 > \eta_1^2$ и неустойчиво при нарушении хотя бы одного из них.

Кроме тривиального, в данной модельной системе имеются два положения равновесия

$$Z_1 = 0, \quad z_1^2 = \frac{2(\eta_1 - \mu_3\gamma_1)}{c_{20}}, \quad z_2 = Z_2 = 0 \quad (c_{20}(\eta_1 - \mu_3\gamma_1) > 0), \quad (3.13)$$

устойчивые в линейном приближении при выполнении условий

$$\eta_1(\eta_1 - \mu_3\gamma_1) > 0, \quad \gamma_1(\xi_1a_2 - \xi_2\gamma_1) > 0, \quad (3.14)$$

а также еще два положения равновесия

$$z_1 = 0, \quad Z_1^2 = -\frac{2(\mu_3\gamma_1 + \eta_1)}{c_{20}}, \quad z_2 = Z_2 = 0 \quad (c_{20}(\mu_3\gamma_1 + \eta_1) < 0), \quad (3.15)$$

устойчивые в линейном приближении, если

$$\eta_1(\mu_3\gamma_1 + \eta_1) > 0, \quad \gamma_1(\xi_1 a_2 - \xi_2 \gamma_1) > 0. \quad (3.16)$$

При нарушении хотя бы одного из неравенств в (3.14) или (3.16) соответствующее положение равновесия неустойчиво. Вторые неравенства в (3.14) и (3.16) означают, что если положения равновесия (3.13) и (3.15) существуют в зоне неустойчивости тривиального равновесия, то они также неустойчивы.

На рисунке 2 в плоскости параметров (ε, α) представлены два варианта взаимного положения областей параметрического резонанса в окрестности рассматриваемой точки кратного резонанса. Предполагается, что коэффициент a_2 нормальной формы положителен; случай $a_2 < 0$ может быть рассмотрен аналогично. Области неустойчивости на рисунке 2 (и на последующих аналогичных рисунках) отмечены штриховкой, области устойчивости в линейном приближении не закрашены. Рисунок 2а отвечает случаю $\mu'_2 > \mu''_2$, для которого имеются две области параметрического резонанса. Рисунок 2b соответствует случаю $\mu'_2 < \mu''_2$, когда одна из областей поглощает другую.

Рис. 2. Области устойчивости и неустойчивости в случае $n = 3$.

Перечислим найденные положения равновесия системы (отличные от входящих в семейство неустойчивых сложных особых точек). Вне узкой зоны параметрического резонанса и ее окрестности ширины $\sim \varepsilon^3$ имеются положения равновесия (3.10), переходящие в меньших окрестностях резонансной точки в решения (3.11) и (3.12). Если $c_{02} > 0$, то они существуют и устойчивы в линейном приближении в зоне неустойчивости ниже граничной кривой $\alpha = \alpha_3$. В случае $c_{02} < 0$, наоборот, эти равновесия существуют выше граничной кривой и неустойчивы.

Для случаев, показанных на рисунках 2а и 2b, в зависимости от знаков коэффициентов c_{20} , γ_1 и η_1 , в узкой зоне неустойчивости тривиального равновесия системы существует одна из пар положений равновесия (3.13) или (3.15). В ее окрестности, ширины $\sim \varepsilon^3$, по одну сторону от этой зоны отсутствуют положения равновесия, отличные от тривиального, а по другую — существуют обе пары равновесий (3.13) и (3.15). Для случаев, относящихся к рисунку 2b, все эти равновесия неустойчивы. Для случаев, относящихся к рисунку 2а,

положения равновесия, существующие в зоне неустойчивости тривиального равновесия системы, устойчивы в линейном приближении. Эти же равновесия остаются устойчивыми в линейном приближении в области существования обеих пар равновесий, при этом равновесия из второй пары неустойчивы.

3.2. Положения равновесия модельных систем при четных n

3.2.1. Области устойчивости и неустойчивости при $K_{21} \neq 0$

Рассмотрим теперь случаи четных n . Для системы, нормализованная квадратичная часть K_{21} которой представляется в виде (2.14), коэффициенты характеристического уравнения (2.18) и его дискриминант d таковы:

$$a = 2\varepsilon a_2 \mu_1 + O(\varepsilon^2), \quad b = \varepsilon^3 b_1(\mu_1), \quad d = 4\mu_1^2 a_2^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$b_1(\mu_1) = 2[4\mu_1^3 \gamma_1^2 a_2 - (a_2(\beta_2^2 + 4\beta_1^2) + \gamma_1(\beta_3^2 + \beta_5^2))\mu_1 + \beta_1(\beta_5^2 - \beta_3^2) + \beta_2\beta_3\beta_5].$$

Граничным кривым соответствует точка $\mu_1 = 0$ и корни уравнения $b_1(\mu_1) = 0$. Возможные варианты взаимного расположения областей устойчивости и неустойчивости представлены на рисунке 3 для случая $a_2 > 0$. Рисунок 3а отвечает случаю единственного и отрицательного корня многочлена $b_1(\mu_1)$, рисунки 3б и 3с — случаям одного и двух положительных корней этого многочлена. Часть граничных кривых на рисунках 3б и 3с попадают в зону неустойчивости и не показаны.

Рис. 3. Области устойчивости и неустойчивости в случае $n = 2$.

3.2.2. Случай $n = 2$

В частном случае $\beta_1 = \beta_2 = 0$ (см. (2.15) или (2.16), $n = 2$) многочлен $b_1(\mu_1)$ имеет нулевой корень и, при условии $\gamma_1 a_2 > 0$, еще два симметричных корня $\mu_1 = \pm \hat{\mu}_1$, где $\hat{\mu}_1^2 = \beta^2 / (4\gamma_1 a_2)$. Области устойчивости и неустойчивости в этом случае качественно такие же, как на рисунках 3а (при $a_2 > 0$, $\gamma_1 < 0$) и 3б (при $a_2 > 0$, $\gamma_1 > 0$).

Рассмотрим модельную систему с гамильтонианом $\Gamma^{(1)}$ из (2.21), вычисляемым с учетом соотношений (2.16), (2.20). Для этой системы возможны положения равновесия двух типов. Два равновесия первого типа

$$Z_2 = 0, \quad z_1 = z_2 = 0, \quad Z_1^2 = -\frac{2\mu_1 \gamma_1}{c_{20}}$$

существуют при $\mu_1 c_{20} \gamma_1 < 0$ и устойчивы в линейном приближении при выполнении условий

$$\mu_1 \gamma_1 > 0, \quad \mu_1 (c_{11} \gamma_1 - c_{20} a_2) > 0.$$

В положениях равновесия второго типа $Z_1 = Z_2 = 0$, а величины z_1 и z_2 удовлетворяют системе уравнений

$$f_1 = 2\mu_1 a_2 z_2 + \beta z_1 + c_{11} z_2 z_1^2 + 4c_{02} z_2^3 = 0, \quad f_2 = 2\gamma_1 \mu_1 z_1 + \beta z_2 + c_{20} z_1^3 + c_{11} z_1 z_2^2 = 0. \quad (3.17)$$

Детальный анализ системы (3.17) затруднителен вследствие большого числа параметров. Укажем некоторые общие свойства ее решений.

Результат f двух многочленов f_1 и f_2 по переменной z_1 имеет вид

$$\begin{aligned} f = & 4c_{02}(4c_{02}c_{20} - c_{11}^2)z_2^8 + 2(4c_{02}c_{20} - c_{11}^2)(12c_{02}a_2c_{20} - 8c_{02}c_{11}\gamma_1 - a_2c_{11}^2)\mu_1 z_2^6 + \\ & + [(8(c_{20}a_2 - c_{11}\gamma_1))(6c_{02}a_2c_{20} - c_{11}^2a_2 - 2c_{02}c_{11}\gamma_1)\mu_1^2 + 16c_{11}c_{20}\beta^2c_{02}]z_2^4 + \\ & + 2[4a_2(c_{20}a_2 - c_{11}\gamma_1)^2\mu_1^2 + [(4c_{20}c_{02} - c_{11}^2)\gamma_1 + 4c_{11}c_{20}a_2]\beta^2]\mu_1 z_2^2 + c_{20}\beta^2(4\mu_1^2a_2\gamma_1 - \beta^2). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Функция f — многочлен восьмой степени (с четными степенями) по z_2 , и для каждого фиксированного значения $\mu_1 = \mu_{10}$ число корней уравнения $f(z_2, \mu_{10}) = 0$ (если они существуют) четно.

Геометрическое место точек в плоскости переменных (z_2, μ_1) , удовлетворяющее условию $f(z_2, \mu_1) = 0$, симметрично относительно оси $O\mu_1$, для одной из ветвей графика ось $O\mu_1$ — вертикальная асимптота. Если $a_2\gamma_1 < 0$, то ветви графика не пересекают ось $O\mu_1$. В случае $a_2\gamma_1 > 0$ имеются пересечения в двух точках $\mu_1 = \pm\hat{\mu}_1$, соответствующих граничным кривым областей параметрического резонанса. При переходе через эти точки появляется (или исчезает) пара симметричных решений уравнения (3.18).

Если выполняется неравенство $c_{20}c_{02} < 0$, то график функции $f = 0$ не пересекает ось Oz_2 и, таким образом, целиком располагается в верхней (при $\mu_1 > 0$) или нижней (при $\mu_1 < 0$) полуплоскости. В случае $c_{20}c_{02} > 0$ есть две симметричные точки пересечения при $z_2 = \pm z_{2*}$, где $z_{2*}^4 = \pm\sqrt{c_{02}c_{20}}\beta^2/[2c_{02}(2c_{11} \pm \sqrt{c_{02}c_{20}})^2]$, а верхний и нижний знаки относятся к случаям $c_{02} > 0, c_{20} > 0$ и $c_{02} < 0, c_{20} < 0$.

Отсюда получим, что в случае $a_2\gamma_1 < 0, c_{20}c_{02} > 0$ при всех μ_1 существует одна пара решений уравнения (3.18) и, кроме того, для некоторых интервалов изменения μ_1 могут существовать еще две пары решений. Если $a_2\gamma_1 < 0, c_{20}c_{02} < 0$, то в одной из полуплоскостей (верхней или нижней) имеются две, четыре или не имеется ни одной пары решений. В случае $a_2\gamma_1 > 0, c_{20}c_{02} > 0$ существуют одна, две, четыре или не существует ни одной пары решений, а при $a_2\gamma_1 > 0, c_{20}c_{02} < 0$ — существуют одна, три или не существует ни одной.

Каждому решению $z_2 = z_{20}$ уравнения (3.18) отвечает единственное решение (z_{10}, z_{20}) системы (3.17). Действительно, функции f_1 и f_2 не могут иметь больше двух общих корней по z_1 ; однако многочлен f_2 не делится без остатка на f_1 , и случай двух общих корней невозможен.

3.2.3. Случай $n = 4$

При рассмотрении первого приближения ($\mu_1 \neq 0$) для случая $n = 4$ имеем модельный гамильтониан $\Gamma^{(1)}$, совпадающий с аналогичным гамильтонианом для первого приближения в случае $n = 3$ (см. раздел 3.1.2); результаты исследования для этих двух случаев совпадают.

В случае $\mu_1 = 0$ рассматривается модельный гамильтониан $\Gamma^{(2)}$ из (2.22), вычисленный при учете соотношений (2.20) и (2.17). Его структура совпадает со структурой модельного гамильтониана $\Gamma^{(1)}$, изученного в разделе 3.2.2 для случая $n = 2$. Получаемые результаты аналогичны, поэтому приведем только основные соотношения.

Условия устойчивости тривиального положения равновесия модельной системы с гамильтонианом $\Gamma^{(2)}$ определяются неравенствами

$$\mu_2 a_2 > \xi_2, \quad (\mu_2 \gamma_1 - \xi_1) [4a_2 \gamma_1 \mu_2^2 - 4(\xi_2 \gamma_1 + a_2 \xi_1) \mu_2 + 4\xi_1 \xi_2 - \xi_3^2] > 0.$$

Чередование областей устойчивости и неустойчивости при $a_2 > 0$ аналогично показанному на рисунках 3b, c, только вместо граничных «прямых» из резонансной точки $(0, \alpha_0)$ выходят «параболы» с горизонтальными касательными.

Модельная система имеет положения равновесия

$$z_1 = z_2 = Z_2 = 0, \quad Z_1^2 = -\frac{2(\mu_2 \gamma_1 - \xi_1)}{c_{20}} \quad ((\mu_2 \gamma_1 - \xi_1) c_{20} < 0),$$

устойчивые в линейном приближении при выполнении условий

$$\mu_2 \gamma_1 - \xi_1 > 0, \quad c_{20} [\mu_2 (a_2 c_{20} - c_{11} \gamma_1) + c_{11} \xi_1 - \xi_2 c_{20}] > 0,$$

а также положения равновесия, для которых $Z_1 = Z_2 = 0$, а величины z_1 и z_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} 2(\mu_2 a_2 - \xi_2) z_2 + \xi_3 z_1 + c_{11} z_2 z_1^2 + 4c_{02} z_2^3 &= 0, \\ 2(\mu_2 \gamma_1 - \xi_1) z_1 + \xi_3 z_2 + c_{20} z_1^3 + c_{11} z_1 z_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Анализ этой системы аналогичен описанному в разделе 3.2.2 анализу системы (3.18).

3.3. Резонансные периодические движения

Вернемся теперь к полным системам с гамильтонианами (2.21)–(2.23). Решим вопрос о существовании периодических решений этих систем, рождающихся из найденных положений равновесия соответствующих им модельных систем. Исключим из рассмотрения положения равновесия, являющиеся сложными особыми точками.

В окрестности каждого положения равновесия $z_j = z_{j*}$, $Z_j = Z_{j*}$ ($j = 1, 2$) модельных систем с гамильтонианами $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(3)}$ полную систему можно рассматривать как квазилинейную с возмущениями порядка ε^2 , ε^3 , ε^4 соответственно.

Для модельной системы с гамильтонианом $\Gamma^{(1)}$ частоты ω_1 , ω_2 малых линейных колебаний в окрестности рассматриваемого положения равновесия удовлетворяют условиям $\omega_1 \sim \varepsilon$, $\omega_2 \sim \sqrt{\varepsilon}$, соответствующие частоты модельной системы с гамильтонианом $\Gamma^{(2)}$ — условиям $\omega_1 \sim \varepsilon^2$, $\omega_2 \sim \varepsilon$, частоты модельной системы с гамильтонианом $\Gamma^{(3)}$ — условиям $\omega_1 \sim \varepsilon^3$, $\omega_2 \sim \varepsilon$ (если квадратичная часть вычисляется по формуле (2.12)) или $\omega_1 \sim \varepsilon^2$, $\omega_2 \sim \varepsilon^{3/2}$ (если квадратичная часть вычисляется по формуле (2.13)). При этом возмущения в полных системах T -периодичны по времени ($T = 2\pi$ или $T = 4\pi$ для случаев четных и нечетных n соответственно).

Таким образом, имеет место нерезонансный случай теории периодических движений Пуанкаре [11], и из каждого положения равновесия модельной системы рождается единственное, T -периодическое по времени, аналитическое по ε периодическое решение полной системы с гамильтонианом (2.21), (2.22) или (2.23), имеющее вид

$$z_j(t) = z_{j*} + O(\varepsilon^l), \quad Z_j(t) = Z_{j*} + O(\varepsilon^l) \quad (j = 1, 2),$$

где $l = 2, 3, 4$.

Производя в обратной последовательности замены переменных, описанные в разделе 2, получим резонансное периодическое движение исходной системы. Если порождающими для данного движения являются положения равновесия систем с гамильтонианами $\Gamma^{(1)}$ или $\Gamma^{(2)}$, то получаемое движение аналитично по $\varepsilon^{1/2}$ или ε соответственно. Если порождающее равновесие отвечает гамильтониану $\Gamma^{(3)}$, то в исходных переменных резонансное периодическое движение представляется в виде

$$q_j(t) = \varepsilon^{3/2} \tilde{q}_j(t, \varepsilon), \quad p_j(t) = \varepsilon^{3/2} \tilde{p}_j(t, \varepsilon) \quad (j = 1, 2),$$

в котором функции $\tilde{q}_j(t, \varepsilon)$ и $\tilde{p}_j(t, \varepsilon)$ аналитичны по ε .

Периодические движения, рождающиеся из устойчивых в линейном приближении или неустойчивых положений равновесия модельных систем, также устойчивы в линейном приближении или неустойчивы. Это следует из непрерывности по малому параметру соответствующих линеаризованных уравнений возмущенного движения.

4. Резонансные периодические движения симметричного спутника в окрестности цилиндрической прецессии

Рассмотрим движение динамически симметричного спутника (твёрдого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Орбиту центра масс спутника предполагаем слабоэллиптической с эксцентриситетом e . Ориентацию системы главных центральных осей инерции спутника в орбитальной системе координат будем задавать при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ .

Пусть A и C — экваториальный и осевой моменты инерции спутника, ω_0 — среднее движение его центра масс по орбите; r — проекция вектора угловой скорости тела в орбитальной системе координат на ось динамической симметрии ($r = r_0 = \text{const}$). Введем отвечающие ψ, θ, φ обобщенные импульсы $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$, обезразмеренные при помощи множителя $A\omega_0$, а также безразмерные параметры $\alpha = C/A$ ($0 \leq \alpha \leq 2$) и $\beta = r_0/\omega_0$.

Рассмотрим стационарное вращение тела вокруг оси его динамической симметрии, расположенной перпендикулярно плоскости орбиты (цилиндрическая прецессия). Ему соответствует частное решение — положение равновесия приведенной системы с двумя степенями свободы, имеющее вид

$$\psi = \pi, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad p_\psi = 0, \quad p_\theta = 0.$$

Используя [12] выражение для гамильтониана системы и полагая

$$\psi = \pi + q_2, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + q_1, \quad p_\psi = p_2, \quad p_\theta = p_1,$$

представим гамильтониан возмущенного движения в виде (1.1), (1.2), где ε надо заменить на e , а

$$\begin{aligned} H_{20} &= \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2 + \left(\frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 - \frac{1}{2} \alpha \beta + \frac{3}{2} \alpha - \frac{3}{2} \right) q_1^2 + (\alpha \beta - 1) q_1 p_2 + q_2 p_1 + \frac{1}{2} \alpha \beta q_2^2, \\ H_{21} &= \left[\left(\frac{3}{2} (\alpha - 1) \right) - \alpha^2 \beta^2 \right] q_1^2 - (p_1^2 + p_2^2) - 2 \alpha \beta q_1 p_2 \cos \nu, \\ H_{22} &= \frac{3}{2} (p_1^2 + p_2^2) \cos^2 \nu - \frac{3}{4} \alpha \beta q_2^2 + \frac{3}{2} \alpha \beta p_2 q_1 \cos 2\nu + \frac{3}{4} \alpha \beta (1 - 2 \alpha \beta \sin^2 \nu) q_1^2, \\ H_{23} &= \alpha^2 \beta^2 \cos \nu (3 - 2 \cos^2 \nu) q_1^2 - 2 \cos^3 \nu (p_1^2 + p_2^2) + \alpha \beta \cos \nu (3 - 4 \cos^2 \nu) q_1 p_2, \end{aligned}$$

$$H_{40} = \left(-\frac{5}{24} \alpha \beta + \frac{1}{3} \alpha^2 \beta^2 - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \right) q_1^4 + \left(\frac{5}{6} \alpha \beta - \frac{1}{3} \right) p_2 q_1^3 + \\ + \frac{1}{2} p_2^2 q_1^2 + \frac{1}{4} \alpha \beta q_1^2 q_2^2 + \frac{1}{2} p_2 q_1 q_2^2 - \frac{1}{24} \alpha \beta q_2^4 - \frac{1}{6} p_1 q_2^3.$$

Здесь ν — истинная аномалия, принимаемая за независимую переменную.

В плоскости параметров (α, β) имеются три точки, для которых в случае круговой ($e = 0$) орбиты реализуются кратные резонансы рассматриваемого в данной статье вида:

$$\begin{aligned} \text{точка } P_1: \quad \alpha &= \frac{3}{4}, \quad \beta = \frac{4}{3} \quad \left(\omega_1 = \frac{1}{2}, \quad \omega_2 = 0 \right), \\ \text{точка } P_2: \quad \alpha &= 2, \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \left(\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 0 \right), \\ \text{точка } P_3: \quad \alpha &= \frac{17}{12}, \quad \beta = \frac{12}{17} \quad \left(\omega_1 = \frac{3}{2}, \quad \omega_2 = 0 \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

В статье [4] (см. также [5]) найдены области параметрического резонанса в окрестности этих точек. Опираясь на результаты раздела 3, опишем периодические решения системы в окрестности точек (4.1) и соответствующие им резонансные периодические движения оси симметрии спутника.

4.1. Точка P_1

Рассмотрим окрестность точки P_1 , полагая

$$\alpha = \frac{3}{4}, \quad \beta = \frac{4}{3} + e\mu_1 + \dots$$

Следуя алгоритму раздела 3, проведем нормализацию в слагаемых второй и четвертой степеней в гамильтониане возмущенного движения. В результате получаем модельный гамильтониан вида (2.21):

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)} = & -\frac{1}{2} Z_2^2 + e \left[\frac{9}{8} \mu_1 z_2^2 + \left(\frac{9}{8} \mu_1 + \frac{15}{16} \right) Z_1^2 + \left(\frac{9}{8} \mu_1 - \frac{15}{16} \right) z_1^2 \right] + \\ & + e \left[\frac{15}{8} (z_1^2 + Z_1^2)^2 + \frac{27}{4} (z_1^2 + Z_1^2) z_2^2 + \frac{9}{8} z_2^4 \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Условие устойчивости (в линейном приближении) тривиального положения равновесия системы имеет вид $\mu_1 < -5/6$, а точками бифуркации будут $\mu_1 = 0$ и $\mu_1 = \pm 5/6$. Для положений равновесия модельной системы с гамильтонианом (4.2), отличных от тривиального, имеем $Z_2 = 0$ и

$$Z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_{10}^2 = \frac{5 - 6\mu_1}{20} \quad \left(\mu_1 < \frac{5}{6} \right), \quad (4.3)$$

$$Z_1 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_{20}^2 = -\frac{\mu_1}{2} \quad (\mu_1 < 0), \quad (4.4)$$

$$Z_1 = 0, \quad z_{10}^2 = -\frac{12\mu_1 + 5}{88}, \quad z_{20}^2 = \frac{15 - 8\mu_1}{88} \quad \left(\mu_1 < -\frac{5}{12} \right), \quad (4.5)$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad Z_{10}^2 = -\frac{6\mu_1 + 5}{20} \quad \left(\mu_1 < -\frac{5}{6} \right), \quad (4.6)$$

$$z_1 = 0, \quad Z_{10}^2 = \frac{5 - 12\mu_1}{88}, \quad z_{20}^2 = -\frac{8\mu_1 + 15}{88} \quad \left(\mu_1 < -\frac{15}{8} \right). \quad (4.7)$$

На рисунке 4 в плоскости параметров (e, β) показана окрестность резонансной точки P_1 . Прямые $\beta = 4/3$, $\beta = 4/3 \pm 5/6 e$ (сплошные линии) и $\beta = 4/3 - 5/12 e$, $\beta = 4/3 - 15/8 e$ (пунктирные линии) разделяют изучаемую часть плоскости параметров на шесть областей. В области, соответствующей условию $\mu_1 > 5/6$, нет положений равновесия приближенной системы, отличных от тривиального. При переходе, в сторону уменьшения, через каждую из трех точек бифуркации из тривиального равновесия рождаются пары неустойчивых равновесных точек (4.3), (4.4), (4.6). При переходе через значения $\mu_1 = -5/12$ и $\mu_1 = -15/8$ (от равновесий (4.4) и (4.6) соответственно) отделяются еще четверки положений равновесия (4.5) и (4.7), они также неустойчивы.

Рис. 4. Области с различным числом периодических движений в окрестности точки P_1 .

В полной системе с гамильтонианом (2.21), (4.2) из каждого положения равновесия рождается единственное аналитическое по $e^{1/2}$ решение, 4π -периодическое по ν . В исходных переменных имеем:

$$q_1 = \sqrt{2} e^{1/2} z_{10} \sin \frac{\nu}{2} + O(e), \quad q_2 = 2\sqrt{2} e^{1/2} z_{10} \cos \frac{\nu}{2} + O(e), \quad (4.8)$$

$$q_1 = -20\sqrt{3} e^{5/2} z_{20}^3 \sin \nu + O(e^{7/2}), \quad q_2 = \left[-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} (\mu_1 + 6 \cos \nu) e \right] e^{1/2} z_{20} + O(e^{7/2}), \quad (4.9)$$

$$q_1 = \sqrt{2} e^{1/2} z_{10} \sin \frac{\nu}{2} + O(e), \quad q_2 = \left(-\sqrt{3} z_{20} + 2\sqrt{2} z_{10} \cos \frac{\nu}{2} \right) e^{1/2} + O(e), \quad (4.10)$$

$$q_1 = -\sqrt{2} e^{1/2} Z_{10} \cos \frac{\nu}{2} + O(e), \quad q_2 = 2\sqrt{2} e^{1/2} Z_{10} \sin \frac{\nu}{2} + O(e), \quad (4.11)$$

$$q_1 = -\sqrt{2} e^{1/2} Z_{10} \cos \frac{\nu}{2} + O(e), \quad q_2 = \left(-\sqrt{3} z_{20} + 2\sqrt{2} Z_{10} \sin \frac{\nu}{2} \right) e^{1/2} + O(e). \quad (4.12)$$

Порядок записи движений (4.8)–(4.12) отвечает порядку перечисления равновесий в соотношениях (4.3)–(4.7), где определены соответствующие равновесные значения z_{10} , z_{20} , Z_{10} .

Соотношения (4.8)–(4.12), в которых отброшены последние слагаемые, описывают в плоскости переменных (q_1, q_2) эллипсы с полуосями $\sim e^{1/2}$ (кроме (4.9)) и с центром либо в начале координат (для (4.8), (4.11)), либо смещенным вдоль оси Oq_2 на расстояние $\sim e^{1/2}$ (для (4.1), (4.12)). Соотношениям (4.9) отвечает эллипс с полуосями $\sim e^{3/2}$ и $\sim e^{5/2}$ и центром, смещенным вдоль оси Oq_2 на расстояние $\sim e^{1/2}$.

Все эти периодические движения неустойчивы.

4.2. Точка P_2

Положим в гамильтониане возмущенного движения

$$\alpha = 2, \quad \beta = \frac{1}{2} + e\mu_1 + e^2\mu_2 + \dots$$

Проведя вычисления, найдем, что нормализованная форма четвертой степени при $e = 0$ имеет вид

$$K_{40} = -\frac{165}{4096}(y_1^2 + Y_1^2)^2 - \frac{27}{256}(y_1^2 + Y_1^2)y_2^2 + \frac{9}{128}y_2^4, \quad (4.13)$$

а квадратичная часть гамильтониана в слагаемых порядка e —

$$K_{21} = e\mu_1 \left[\frac{3}{4}y_2^2 - \frac{3}{16}(y_1^2 + Y_1^2) \right]. \quad (4.14)$$

Тривиальное положение равновесия системы устойчиво в линейном приближении, если $\mu_1 > 0$, и неустойчиво при $\mu_1 < 0$.

При $\mu_1 \neq 0$ рассмотрим модельную систему с гамильтонианом $\Gamma^{(1)}$ с учетом выражений (4.13), (4.14). При $\mu_1 < 0$ в системе имеются семейство неустойчивых сложных особых точек $z_1^2 + Z_1^2 = -128/55\mu_1$, $z_2 = Z_2 = 0$ и еще два положения равновесия

$$Z_2 = 0, \quad z_1 = 0, \quad Z_1 = 0, \quad z_2^2 = -\frac{16}{3}\mu_1, \quad (4.15)$$

устойчивые в линейном приближении в области существования. При $\mu_1 > 0$ положений равновесия, отличных от тривиального, нет.

При $\mu_1 = 0$ имеем $K_{21} = 0$, а нормализованная форма K_{22} такова:

$$K_{22} = \left(-\frac{3}{16}\mu_2 + \frac{3}{8} \right) (y_1^2 + Y_1^2) - \frac{9\sqrt{6}}{32}y_1y_2 + \frac{3}{4}\mu_2y_2^2. \quad (4.16)$$

Отсюда получаем (см. также [4]) граничные точки

$$\mu_{21} = 1 - \frac{\sqrt{10}}{8} \approx 0.604715, \quad \mu_{22} = 1 + \frac{\sqrt{10}}{8} \approx 1.395285, \quad \mu_{23} = 2$$

и области параметрического резонанса $\mu_2 < \mu_{21}$ и $\mu_{22} < \mu_2 < \mu_{23}$.

Модельная система с гамильтонианом $\Gamma^{(2)}$ (с учетом (4.13) и (4.16)) имеет в области $\mu_2 < 2$ два положения равновесия

$$z_2 = 0, \quad z_1 = 0, \quad Z_1^2 = \frac{256 - 128\mu_2}{55}, \quad (4.17)$$

устойчивые в линейном приближении на интервале $36/73 < \mu_2 < 2$ и неустойчивые при $\mu_2 < 36/73$.

Для других положений равновесия $Z_1 = Z_2 = 0$, а величины z_1 и z_2 удовлетворяют системе уравнений, аналогичной (3.17):

$$\begin{aligned} f_1 &= -12z_2^3 + 9z_2z_1^2 + 12\sqrt{6}z_1 - 64\mu_2z_2 = 0, \\ f_2 &= -256z_1 + 96\sqrt{6}z_2 + 72z_2^2z_1 + 128z_1\mu_2 + 55z_1^3 = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Результат многочленов f_1 и f_2 по переменной z_1 равен $z_2 F(z_2, \mu_2)$, где

$$F(z_2, \mu_2) = 320787z_2^8 + (4002480\mu_2 - 1130112)y_2^6 + \\ + (16314624\mu_2^2 - 10063872\mu_2 + 3561408)z_2^4 + (21827584\mu_2^3 - 21528576\mu_2^2 + \\ + 21254400\mu_2 - 4520448)z_2^2 + 6082560\mu_2^2 - 12165120\mu_2 + 5132160.$$

На рисунке 5 в плоскости величин z_2, μ_2 представлено геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению $F = 0$. Замкнутая кривая в верхней полуплоскости находится в зоне устойчивости тривиального равновесия системы, пересекая ось ординат в точках $\mu_2 = 1 \pm \sqrt{10}/8$; для крайних левой и правой точек кривой имеем $z_2 = \pm 0.262764$, $\mu_2 = 0.822307$. Две симметричные кривые из нижней полуплоскости находятся в области неустойчивости тривиального равновесия. Точки максимума этих кривых имеют координаты $z_2 = \pm 1.344273$, $\mu_2 = \mu_{2*} = -0.362062$.

Рис. 5. Геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению $F = 0$.

При различных значениях μ_2 прямые $\mu_2 = \text{const}$ пересекают описанные кривые либо в двух (при $\mu_{21} < \mu_2 < \mu_{22}$), либо в четырех точках (при $\mu_1 < \mu_{2*}$); в остальных случаях пересечений нет. Таким образом, система (4.18) может иметь либо два, либо четыре решения или не иметь ни одного решения.

Были проверены условия устойчивости соответствующих этим решениям положений равновесия модельной системы. Выявлено, что точкам замкнутой кривой на рисунке 5 отвечают неустойчивые положения равновесия. Участкам кривых из нижней полуплоскости, расположенным левее точки максимума для левой кривой и правее точки максимума для правой кривой, соответствуют устойчивые в линейном приближении положения равновесия, участкам между точками максимума — неустойчивые равновесия системы.

Полученные результаты проиллюстрированы на рисунке 6 в плоскости параметров (e, β) . Сплошными линиями показаны кривые $\beta = 1/2 + e^2 \mu_{2k}$ ($k = 1, 2, 3$) границ областей параметрического резонанса, пунктирными линиями — кривые $\beta = 1/2 + (36/73)e^2$ и $\beta = 1/2 + e^2 \mu_{2*}$. Окрестность резонансной точки разделена этими кривыми на шесть областей.

В области 1 на рисунке 6 в модельной системе нет положений равновесия, отличных от тривиального. В областях 2–4 имеются два устойчивых (в линейном приближении) положения равновесия (4.17), а в области 3 еще два неустойчивых равновесия, отвечающих системе (4.18). В области 5 и части области 6 в окрестности резонансной точки ширины $\sim e$

Рис. 6. Области с различным числом периодических движений в окрестности точки P_2 .

(случай $\mu_1 = 0$) равновесия (4.17) неустойчивы, в той же части области 6 к ним добавляются еще четыре равновесия, отвечающие (4.18), — два устойчивые (в линейном приближении) и два неустойчивые.

Вне указанной части области 6 в $e^{1/2}$ -окрестности резонансной точки (случай $\mu_1 < 0$) в системе имеются два положения равновесия (4.15), устойчивые в линейном приближении, и семейство неустойчивых положений равновесия (сложных особых точек).

Положениям равновесия (4.15) в исходной полной системе отвечают 2π -периодические по ν и аналитические по $e^{1/2}$ движения вида

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{245\sqrt{3}}{384} e^{5/2} \mu_1 z_{20} \sin \nu + O(e^{7/2}), \\ q_2 &= \left[\frac{\sqrt{3}}{2} e^{1/2} - \frac{\sqrt{3}}{768} e^{3/2} \left(\frac{416}{3} \mu_1 + 768 \cos \nu \right) \right] z_{20} + O(e^{5/2}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Эти соотношения (без последних слагаемых) описывают в плоскости (q_1, q_2) эллипс с полуосями $\sim e^{5/2}$ и $\sim e^{3/2}$, центр которого смещен вдоль оси Oq_2 на расстояние $\sim e^{1/2}$. Периодические движения (4.19) устойчивы в линейном приближении.

Из положений равновесия приближенной системы с гамильтонианом $\Gamma^{(2)}$ рождаются 2π -периодические по ν и аналитические по e движения. Периодические движения, отвечающие положениям равновесия (4.17), имеют вид

$$q_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} e Z_{10} \cos 2\nu + O(e^2), \quad q_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} e Z_{10} \sin 2\nu + O(e^2), \quad (4.20)$$

а периодические движения, отвечающие соотношениям (4.18), — вид

$$q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e z_{10} \sin 2\nu + O(e^2), \quad q_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} z_{20} + \frac{\sqrt{2}}{4} z_{10} \cos 2\nu \right) e + O(e^2). \quad (4.21)$$

Соотношения (4.20), (4.21) (без последних слагаемых) описывают эллипсы с полуосями $\sim e$; центр эллипса, отвечающего (4.21), смещен вдоль оси Oq_2 на расстояние $\sim e$. Устойчивость (в линейном приближении) или неустойчивость этих движений определяется устойчивостью (в линейном приближении) или неустойчивостью порождающих их равновесных точек.

4.3. Точка P_3

При $e = 0$ нормализованная форма четвертой степени гамильтониана возмущенного движения, соответствующего точке P_3 , имеет вид

$$K_{40} = -\frac{55}{1944} (y_1^2 + Y_1^2)^2 - \frac{25}{324} (y_1^2 + Y_1^2) y_2^2 + \frac{25}{648} y_2^4.$$

При $e \neq 0$ положим

$$\alpha = \frac{17}{12}, \quad \beta = \frac{12}{17} + e\mu_1 + e^2\mu_2 + e^3\mu_3 + \dots$$

Нормализованная квадратичная часть K_{21} имеет при $\mu_1 \neq 0$ вид

$$K_{21} = -\frac{85}{648} \mu_1 (z_1^2 + Z_1^2) + \frac{85}{216} \mu_1 z_2^2.$$

При $\mu_1 > 0$ тривиальное положение равновесия устойчиво в линейном приближении и при $\mu_1 < 0$ неустойчиво. Для системы с соответствующим модельным гамильтонианом $\Gamma^{(1)}$ (при $\mu_1 \neq 0$) положениями равновесия являются точки

$$Z_2 = 0, \quad z_1 = 0, \quad Z_1 = 0, \quad z_2^2 = -\frac{51}{10} \mu_1, \quad (4.22)$$

устойчивые в линейном приближении в области существования $\mu_1 < 0$.

На следующем шаге нормализации ($\mu_1 = 0$) имеем

$$K_{22} = \left(\frac{165}{512} - \frac{85}{648} \mu_2 \right) (z_1^2 + Z_1^2) + \frac{85}{216} \mu_2 z_2^2.$$

При $\mu_2 \neq 0$ и $\mu_2 \neq 2673/1088$ рассмотрим модельную систему с гамильтонианом $\Gamma^{(2)}$. Ее положениями равновесия при $\mu_2 < 0$ будут решения вида (4.22) (где сделана замена μ_1 на μ_2), устойчивые в области существования.

В системах с гамильтонианами $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$ имеются семейства неустойчивых сложных особых точек, которые здесь не приводятся (см. раздел 3.1.2).

Рассматривая третье приближение в случае $\mu_2 = 0$, найдем, аналогично, что на границе области неустойчивости $\mu_3 = 0$, а вблизи нее, при $\mu_3 < 0$, имеются два положения равновесия вида (4.22) (с заменой μ_1 на μ_3).

При $\mu_2 = 2673/1088$ исследуется модельная система с гамильтонианом $\Gamma^{(3)}$, в котором

$$\Gamma_{22} = \frac{495}{512} z_2^2, \quad \Gamma_{23} = \left(\frac{12575}{110592} - \frac{85}{648} \mu_3 \right) Z_1^2 + \left(-\frac{85}{648}, \mu_3 - \frac{12575}{110592} \right) z_1^2 + \frac{85}{216} \mu_3 z_2^2.$$

Отсюда находим область параметрического резонанса $-\mu_{3*} < \mu_3 < \mu_{3*}$, где $\mu_{3*} = 7545/8704$, и новые положения равновесия системы: неустойчивые вида

$$z_2 = 0, \quad Z_2 = 0, \quad Z_1 = 0, \quad z_1^2 = -\frac{51}{22} \mu_3 - \frac{22635}{11264} \quad \left(\mu_3 < -\frac{7545}{8704} \right) \quad (4.23)$$

и устойчивые в линейном приближении вида

$$z_2 = 0, \quad Z_2 = 0, \quad Z_1 = 0, \quad z_1^2 = \frac{22635}{11264} - \frac{51}{22} \mu_3 \quad \left(\mu_3 < \frac{7545}{8704} \right). \quad (4.24)$$

Полученные результаты соответствуют рисунку 2а. В нижней области неустойчивости тривиального равновесия имеются два положения равновесия вида (4.22), устойчивые в линейном приближении. В области выше верхней граничной кривой нет положений равновесия системы, отличных от тривиального, в зоне параметрического резонанса появляется пара устойчивых (в линейном приближении) положений равновесия (4.24), а в области ниже этой зоны, в окрестности ширины $\sim e^{3/2}$, к ним добавляются еще два неустойчивых равновесия (4.23).

Выпишем соответствующие периодические движения исходной полной системы. Из равновесий (4.22) рождаются 4π -периодические по ν , аналитические по $e^{1/2}$ и устойчивые в линейном приближении решения вида

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{476\sqrt{5}}{6561} e^{5/2} z_{20}^3 \sin \nu + O(e^{7/2}), \\ q_2 &= \left[\frac{\sqrt{5}}{3} e^{1/2} - \frac{2\sqrt{5}}{405} e^{3/2} (34\mu_1 + 135 \cos \nu) \right] z_{20} + O(e^{5/2}). \end{aligned}$$

Эти соотношения (без последних слагаемых) задают эллипс, аналогичный описанному при рассмотрении периодического движения (4.19).

В случае $\mu_1 = 0$ характер периодического движения, рождающегося из равновесия (4.22) (где сделана замена μ_1 на μ_2), меняется, имеем

$$q_1 = -\frac{3\sqrt{5}}{7} e^3 z_{20} \sin 2\nu + O(e^4), \quad q_2 = \frac{\sqrt{5}}{3} e y_{20} - \frac{2\sqrt{5}}{3} e^2 z_{20} \cos \nu + O(e^4). \quad (4.25)$$

Отбрасывая в (4.25) последние слагаемые и исключая независимую переменную, получим уравнение траектории — петли (рис. 7):

$$\frac{1}{20} \frac{(-3q_2 + \sqrt{5}e z_{20})^2}{e^4 z_{20}^2} + \frac{49}{9} \frac{q_1^2}{e^2 (-3q_2 + \sqrt{5}e z_{20})^2} = 1.$$

Если $\mu_1 = \mu_2 = 0$, то из аналогичных положений равновесия рождаются периодические движения вида

$$q_1 = \frac{23\sqrt{5}}{96} e^{7/2} z_{20} \sin 2\nu + O(e^{9/2}), \quad q_2 = \frac{\sqrt{5}}{3} e^{3/2} z_{20} - \frac{2\sqrt{5}}{3} e^{5/2} z_{20} \cos \nu + O(e^{7/2}), \quad (4.26)$$

Рис. 7. Траектория-петля.

и им также соответствует движение по петле

$$\frac{1}{20} \frac{(-3q_2 + e^{3/2} y_{20} \sqrt{5})^2}{e^5 z_{20}^2} + \frac{9216}{529} \frac{q_1^2}{e^2 (-3q_2 + e^{3/2} z_{20} \sqrt{5})^2} = 1.$$

Движения (4.25) и (4.26) устойчивы в линейном приближении в области существования.

Из положений равновесия (4.23) получаем неустойчивые периодические движения исходной системы

$$q_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} e^{3/2} z_{10} \sin \frac{3\nu}{2} + O(e^{5/2}), \quad q_2 = \frac{2\sqrt{6}}{9} e^{3/2} z_{10} \cos \frac{3\nu}{2} + O(e^{5/2}),$$

а из положений равновесия (4.24) — периодические движения

$$q_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3} e^{3/2} Z_{10} \cos \frac{3\nu}{2} + O(e^{5/2}), \quad q_2 = \frac{2\sqrt{6}}{9} e^{3/2} Z_{10} \sin \frac{3\nu}{2} + O(e^{5/2}),$$

устойчивые в линейном приближении. В обоих случаях движение происходит по траекториям, близким к эллипсам с полуосями $\sim e^{3/2}$.

References

- [1] Yakubovich V. A., Starzhinskii V. M. *Parametric resonance in linear systems*, Moscow: Nauka, 1987 (Russian).
- [2] Markeev A. P. On a multiple resonance in linear Hamiltonian systems, *Dokl. Phys.*, 2005, vol. 50, no. 5, pp. 278–282; see also: *Dokl. Akad. Nauk*, 2005, vol. 402, no. 3, pp. 339–343.
- [3] Markeev A. P. On one special case of parametric resonance in problems of celestial mechanics, *Astron. Lett.*, 2005, vol. 31, no. 5, pp. 350–356; see also: *Pis'ma v Astron. Zh.*, 2005, vol. 31, no. 5, pp. 388–394.
- [4] Markeyev A. P. Multiple parametric resonance in Hamilton systems, *J. Appl. Math. Mech.*, 2006, vol. 70, no. 2, pp. 176–194; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2006, vol. 70, no. 2, pp. 200–220.
- [5] Markeev A. P. *Linear Hamiltonian systems and some problems of stability of the satellite center of mass*, Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2009 (Russian).
- [6] Markeyev A. P. The behaviour of a non-linear Hamiltonian system with one degree of freedom at the boundary of a parametric resonance domain, *J. Appl. Math. Mech.*, 1995, vol. 59, no. 4, pp. 541–551; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1995, vol. 59, no. 4, pp. 569–580.
- [7] Markeev A. P. Parametric resonance and non-linear oscillations of a heavy rigid body in the neighborhood of its planar rotations, *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1995, no. 5, pp. 34–44 (Russian).
- [8] Kholostova O. V. Parametric resonance in the problem of non-linear oscillations of a satellite in an elliptic orbit, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1996, vol. 34, no. 3, pp. 312–316 (Russian).
- [9] Kholostova O. V. The periodic motions of a non-autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom at parametric resonance of the fundamental type, *J. Appl. Math. Mech.*, 2002, vol. 66, no. 4, pp. 529–538; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2002, vol. 66, no. 4, pp. 540–551.
- [10] Markeev A. P. *Libration points in celestial mechanics and space dynamics*, Moscow: Nauka, 1978 (Russian).
- [11] Malkin I. G. *Some problems in the theory of nonlinear oscillations: In 2 Vols.*, Washington, D.C.: United States Atomic Energy Commission, Technical Information Service, 1959.
- [12] Markeev A. P. On rotational motion of a dynamically symmetrical satellite in an elliptic orbit, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1967, vol. 5, no. 4, pp. 530–539 (Russian).
- [13] Beletskii V. V. *Satellite's motion about center of mass in a gravitational field*, Moscow: MGU, 1975 (Russian).

On periodic motions of a nonautonomous Hamiltonian system in one case of multiple parametric resonance

Olga V. Kholostova

Moscow Aviation Institute (National Research University)

Volokolamskoe sh. 4, GSP-3, A-80, Moscow, 125993, Russia

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Institutskii per. 9, Dolgoprudnyi, Moscow Region, 141700, Russia

kholostova_o@mail.ru

The motion of a nonautonomous time-periodic two-degree-of-freedom Hamiltonian system in a neighborhood of an equilibrium point is considered. The Hamiltonian function of the system is supposed to depend on two parameters ε and α , with ε being small and the system being autonomous at $\varepsilon = 0$. It is also supposed that for $\varepsilon = 0$ and some values of α one of the frequencies of small linear oscillations of the system in the neighborhood of the equilibrium point is an integer or half-integer and the other is equal to zero, that is, the system exhibits a multiple parametric resonance. The case is considered where the rank of the matrix of equations of perturbed motion that are linearized at $\varepsilon = 0$ in the neighborhood of the equilibrium point is equal to three. For sufficiently small but nonzero values of ε and for values of α close to the resonant ones, the question of existence, bifurcations, and stability (in the linear approximation) of the periodic motions of the system is solved. As an application, periodic motions of a symmetrical satellite in the neighborhood of its cylindrical precession in an orbit with small eccentricity are constructed for cases of the multiple resonances considered.

MSC 2010: 70H08, 70H12, 70H14, 70H15, 70M20

Keywords: Hamiltonian system, multiple parametric resonance, periodic motions, stability, cylindrical precession of a satellite

Received September 19, 2017, accepted November 07, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 477–504 (Russian)