ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 532.529:541.182

MSC 2010: 76D07, 76D09, 76D17

Периодическое течение вязкой жидкости с заданным градиентом давления и температуры

М. С. Дерябина, С. И. Мартынов

Предложена процедура построения приближенного периодического решения уравнений движения вязкой жидкости в неограниченной области в классе кусочно-гладких функций при заданном градиенте давления и температуры при малых числах Рейнольдса. Процедура сводится к разбиению области жидкости на ячейки, в которых ищется решение с граничными условиями, соответствующими периодической функции. Рассмотрены случаи двух- и трехмерных течений вязкой жидкости. Найдено, что полученное решение можно рассматривать как течение через периодическую систему точечных частиц, помещенных в углах ячеек. Получено, что при периодическом течении расход жидкости через единицу площади поперечного сечения меньше, чем при течении Пуазейля.

Ключевые слова: вязкая жидкость, периодическое решение, кусочно-гладкая функция, градиент, давление, температура

Получено 10 ноября 2017 года
После доработки 06 марта 2018 года

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-00007).

Дерябина Мария Сергеевна
deryabinams@mail.ru
Мартынов Сергей Иванович
martynovsi@mail.ru
Югорский государственный университет
628012, Россия, г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д. 16

1. Введение

Моделирование течения вязкой жидкости в пористой среде представляет собой сложную математическую задачу, актуальность которой связана как с чрезвычайно широкой областью возможных приложений полученных результатов, так и с разработкой новых теоретических методов ее решения.

В современных исследованиях используются различные подходы к ее решению. Одним из наиболее распространенных является подход, который заключается в том, что на основе общих физических законов сохранения выписываются дифференциальные уравнения для макроскопического течения жидкости в пористой среде, которые затем решаются аналитическими и численными методами. Значения физических параметров среды, входящих в эти уравнения, определяются экспериментально. Однако для реальных пористых сред экспериментальное нахождение параметров затруднено вследствие как уникальности самих таких сред, так и сложности определения в лабораторных экспериментах параметров, характеризующих эту систему в естественных условиях.

Примером такого подхода является моделирование фильтрации жидкости на основе закона Дарси и его модификаций [1]. Развитие компьютерных технологий дало возможность активно использовать как моделирование на основе обобщенных уравнений Дарси, так и прямое численное решение уравнений гидродинамики в некоторой пористой среде, геометрия которой воспроизводит структуру реальной пористой среды на основе метода компьютерной томографии образца пористого материала. Однако реализация последнего подхода требует значительных вычислительных ресурсов. Например, для цифрового представления реального образца пористого материала в виде кубика размером 600 мкм по каждой стороне требуется 10^9 пикселей [2]. Более простой аналог этого метода основан на моделировании пористой среды большим числом неподвижных полидисперсных частиц (имитирующих структуру пористой среды), через которые происходит течение жидкости [3]. Но и при этом имеются математические трудности, связанные с определением параметров потока при наличии большого числа взаимодействующих тел [4]. Для того чтобы обойти эти трудности, появились модели, основанные на различных упрощающих задачу предположениях. Одним из примеров является модель пористой среды как периодической решетки частиц [5–7]. И хотя реальные пористые среды не являются периодическими структурами, такая модель дает возможность учитывать основные свойства материала: пористость, изотропность, масштаб.

В работах [8, 9] предложен метод решения задачи о динамике большого числа частиц, позволяющий учитывать гидродинамическое взаимодействие частиц в различных потоках вязкой жидкости. В работах [10, 11] на основе этого метода найдено аналитическое решение задачи о течении вязкой жидкости через неподвижную бесконечную периодическую решетку сфер. Учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц. Решение основано на суммировании возмущений от каждой частицы в решетке. В работе [11] построено периодическое всюду конечное решение уравнений Стокса для бесконечной решетки в потоке жидкости, скорость которого представляется в виде постоянной или линейной функции координат. Соответственно, давление представляется в виде линейной или постоянной функции. Задачу с постоянной скоростью потока можно рассматривать с двух точек зрения: необходимо найти градиент давления при заданной скорости или, наоборот, задан градиент давления и необходимо найти скорость. Но если в первом случае имеется предельный переход к решению об обтекании единичной сферы, то для второго случая такой переход отсутствует. На практике возникает именно вторая задача, когда известен градиент дав-

ления и требуется найти скорость фильтрации. Однако в этом случае при рассмотренном в работе [11] виде решения с постоянной составляющей скорости возникает особенность при малых значениях параметра, характеризующего расстояние между частицами. В работе [10] сделано предположение, что наличие этой особенности связано с видом решения для скорости, а именно: в этом случае решение должно иметь другой профиль скорости, который вблизи частиц приближенно можно представить течением с квадратичной по координатам функцией скорости. Для этого случая были проведены оценки коэффициента фильтрации. Вопрос о том, как построить периодическое всюду конечное решение, соответствующее этому случаю, оставался открытым. Проблема заключается в том, что при наличии заданного градиента давления известное решение Пуазейля для течения вязкой жидкости неприменимо для безграничной области. Поэтому требуется сначала найти такое решение, а затем использовать его для решения задачи о течении вязкой жидкости через периодическую решетку частиц. Следует отметить, что проблема нахождения точных решений уравнений течения вязкой жидкости всегда была актуальна. В настоящее время это связано с многочисленными приложениями, в том числе и с расчетами течения вязкой жидкости в каналах различной геометрии в неоднородном температурном поле. Имеются многочисленные работы по данной проблеме [12–14]. Основной подход к нахождению таких решений заключается в использовании замен, сводящих систему уравнений в частных производных к системе уравнений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ниже представлен метод построения приближенного периодического решения течения вязкой жидкости в безграничной области, основанный на результатах работы [15].

2. Периодическое решение при заданном градиенте давления. Двумерный случай течения жидкости

2.1. Постановка задачи

Целью работы является построение периодического решения течения вязкой жидкости в неограниченной области, пригодного в дальнейшем для использования при моделировании фильтрации жидкости через периодическую систему частиц. В работе [11] найдено, что даже при учете гидродинамического взаимодействия всех частиц возмущения от одной частицы не выходят за пределы ячейки, в которой находится частица. Поэтому для построения периодического решения разобьем всю область, занимаемую жидкостью, на прямоугольные ячейки размерами $2l$ и $2h$ по осям OX и OY соответственно. Выберем систему координат так, что ось OX направлена в противоположном направлении, чем градиент давления ∇p_0 . Соответственно, оси OY и OZ направлены перпендикулярно градиенту. Будем рассматривать такие масштабы ячейки, для которого возможно использовать приближение Стокса для жидкости с вязкостью η :

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \eta \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p. \quad (2.1)$$

Ниже приводится процедура получения приближенного периодического решения системы (2.1) для случая двумерного течения жидкости, удовлетворяющего условию непрерывности скорости, нормальных и касательных напряжений на границах ячейки. Будем рассматривать двумерный случай, когда все искомые величины зависят от двух координат, x и y .

Выберем произвольную ячейку и поместим начало координат в центре такой ячейки. Задача сводится к нахождению такого решения уравнений (2.1), чтобы в соседних ячей-

ках оно периодически повторялось, то есть составляющие скорости должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} u_x(x, h) &= u_x(x, -h), & u_x(-l, y) &= u_x(l, y), \\ u_y(x, h) &= u_y(x, -h), & u_y(-l, y) &= u_x(l, y). \end{aligned} \quad (2.2)$$

При этом на границах ячейки должны выполняться условия непрерывности нормальных и касательных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(x, -h) &= \sigma_{xy}(x, h), & \sigma_{yy}(x, -h) &= \sigma_{yy}(x, h), \\ \sigma_{yx}(-l, y) &= \sigma_{yx}(l, y), & \sigma_{xx}(-l, y) &= \sigma_{xx}(l, y). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь σ_{xy} , σ_{xx} , σ_{yy} — компоненты тензора полных напряжений в жидкости [16].

2.2. Общее решение задачи для произвольной ячейки

2.2.1. Система уравнений и граничные условия для скорости

Систему уравнений (2.1) в ячейке запишем в виде

$$\begin{aligned} \eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \eta \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Как известно [16], имеется точное решение уравнений Навье–Стокса для случая течения вязкой жидкости по каналам различного сечения. Для течения жидкости между двумя плоскостями выражение для скорости имеет вид

$$u_x = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2).$$

Здесь предполагается, что скорость жидкости на плоскостях равна нулю. Так как границы в ячейках не являются твердыми, решение системы (2.4) будем искать в виде суммы известного решения Пуазейля и неизвестных функций:

$$u_x(x, y) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2) + u(x, y), \quad u_y(x, y) = v(x, y). \quad (2.5)$$

Для неизвестных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ из (2.4) с учетом (2.5) получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При этом граничные условия для скорости $u(x, y)$ примут вид

$$u(-l, y) = u(l, y) = 0. \quad (2.7)$$

Условия для скорости $v(x, y)$ на границах ячейки также легко выписываются из соотношений (2.2).

2.2.2. Метод решения

Частные решения первого уравнения (2.6), удовлетворяющие граничным условиям (2.7), будем искать, следуя работе [17]:

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Подставляя это представление в первое уравнение (2.6), находим

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda.$$

С учетом однородного граничного условия для $u(x, y)$ получаем задачу на собственные функции и собственные значения на отрезке $-l < x < l$:

$$X'' + \lambda X = 0.$$

Решение задачи представим как

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x),$$

где коэффициенты C_1 и C_2 определяются из системы

$$\begin{aligned} C_1 \sin(\sqrt{\lambda}l) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}l) &= 0, \\ -C_1 \sin(\sqrt{\lambda}l) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}l) &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет нетривиальное решение, если определитель системы равен нулю. Из этого условия получаем дисперсионное уравнение относительно параметра λ ,

$$\sin(2\sqrt{\lambda}l) = 0,$$

и систему собственных значений

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Если $n = 2k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то $X_k = \sin(\sqrt{\lambda_k}x)$, где $\lambda_k = (\pi k/l)^2$. Если $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то $X_k = \cos(\sqrt{\lambda_k}x)$, где $\lambda_k = ((\pi(2k + 1))/2l)^2$.

Постоянные C_1 и C_2 положили равными единице, так как значения собственных функций определены с точностью до постоянного множителя. Заметим, что собственные функции X_k обладают свойством ортогональности на отрезке $[-l; l]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \int_{-l}^l \sin\left(\frac{\pi k}{l}z\right) \sin\left(\frac{\pi k'}{l}z\right) &= \delta_{kk'}, \\ \frac{1}{l} \int_{-l}^l \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}z\right) \cos\left(\frac{\pi(2k'+1)}{2l}z\right) &= \delta_{kk'}, \\ \frac{1}{l} \int_{-l}^l \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}z\right) \sin\left(\frac{\pi k'}{l}z\right) &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Соотношения (2.8) выполняются при любых k и k' , $\delta_{kk'}$ — символ Кронекера.

Для определения функции $Y(y)$ получим уравнение

$$Y'' - \lambda Y = 0.$$

Фундаментальную систему решений этого уравнения удобно записать в виде функций $\sinh \sqrt{\lambda_k} y$ и $\cosh \sqrt{\lambda_k} y$. Таким образом, построены системы частных решений уравнения Лапласа для функции $u(x, y)$. Решение первого уравнения системы (2.6) представим в виде разложения по этим частным решениям:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[A_k \sinh \left(\frac{\pi k}{l} y \right) + B_k \cosh \left(\frac{\pi k}{l} y \right) \right] \sin \left(\frac{\pi k}{l} x \right) \right\} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[C_k \sinh \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) + D_k \cosh \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \right] \cos \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right\},$$

где коэффициенты ряда определяются из граничных условий в ячейке. Из условия $u_x(x, -h) = u_x(x, h)$ следует, что $A_k = 0$, $C_k = 0$. Скорость $v(x, y)$ представим в виде

$$v(x, y) = \hat{X}(x) \hat{Y}(y).$$

Из условия неразрывности (2.6) получим, что

$$v(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ -B_k \sinh \left(\frac{\pi k}{l} y \right) \cos \left(\frac{\pi k}{l} x \right) \right\} + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ D_k \sinh \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \sin \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right\}.$$

Необходимо отметить, что найденное выражение для $v(x, y)$ автоматически удовлетворяет второму уравнению (2.6).

Рассмотрим условие неразрывности касательных напряжений

$$\sigma_{xy}(x, -h) = \sigma_{xy}(x, h).$$

Учитывая (2.6), выражение для касательного напряжения имеет вид

$$\sigma_{xy}(x, y) = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} y.$$

Подставляя найденные выражения для скоростей u и v , получим следующее равенство:

$$\sigma_{xy}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2B_k \frac{\pi k}{l} \sinh \left(\frac{\pi k}{l} y \right) \sin \left(\frac{\pi k}{l} x \right) \right\} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2D_k \frac{\pi(2k+1)}{2l} \sinh \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \cos \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right\} + \frac{\partial p}{\partial x} y.$$

Так как функция $\sinh(z)$ нечетная, то, подставляя найденное $\sigma_{xy}(x, y)$ в условие (2.9), получим равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2B_k \frac{\pi k}{l} \sinh \left(\frac{\pi k}{l} h \right) \sin \left(\frac{\pi k}{l} x \right) \right\} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2D_k \frac{\pi(2k+1)}{2l} \sinh \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} h \right) \cos \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right\} + \frac{\partial p}{\partial x} h = 0.$$

Умножая обе части полученного равенства на $\sin(\pi k'/lx)$ и интегрируя по x в пределах от $-l$ до l , с учетом свойств ортогональности (2.8) находим, что $B_k = 0$ для любого значения k . Умножая затем обе части равенства на $\cos(\pi(2k' + 1)x/2l)$ и интегрируя по x в пределах от $-l$ до l , с учетом (2.8) получим равенство

$$\eta D_k \frac{\pi(2k+1)}{2l} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}h\right) + \frac{\partial p}{\partial x} h \frac{4 \cos(\pi k)}{\pi(2k+1)} = 0.$$

Учитывая, что $\cos(\pi k) = (-1)^k$, находим коэффициент D_k :

$$D_k = (-1)^{k+1} \frac{4hl}{\eta \pi^2 (2k+1)^2 \sinh(\lambda_k h)} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \lambda_k = \frac{\pi(2k+1)}{2l}. \quad (2.9)$$

Отметим, что условие неразрывности касательных напряжений

$$\sigma_{xy}(-l, y) = \sigma_{xy}(l, y)$$

выполняется, так как функция $\cos(\pi(2k' + 1)x/2l)$ четная.

2.2.3. Скорость жидкости в ячейке

Таким образом, распределение скоростей в ячейке имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[D_k \coth\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}y\right) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right) \right], \\ v(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[D_k \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}y\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right) \right]. \end{aligned}$$

Используя найденные выражения для составляющих скорости жидкости в ячейке, проверим условия для нормальных напряжений на границе ячейки (2.3). Составляющая $\sigma_{yy}(x, y)$ тензора напряжений имеет вид

$$\sigma_{yy}(x, y) = \eta \sum_{k=0}^{\infty} \left[D_k \frac{\pi(2k+1)}{l} \cosh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}y\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right) \right].$$

Так как функция четная по переменной y , то условие для $\sigma_{yy}(x, y)$ выполняется.

Для проверки последнего условия (2.3) получим выражение для составляющей $\sigma_{xx}(x, y)$, которая имеет вид

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\eta \sum_{k=0}^{\infty} \left[D_k \frac{\pi(2k+1)}{l} \cosh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}y\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right) \right] - p_0 - \frac{\partial p}{\partial x} x.$$

Здесь $p_0 + (\partial p/\partial x)x$ — приложенное давление с заданным градиентом. Подставляя это выражение в условие $\sigma_{xx}(-l, y) = \sigma_{xx}(l, y)$, получим, что должно выполняться равенство

$$\eta \sum_{k=0}^{\infty} \left[D_k \frac{\pi(2k+1)}{l} \cosh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}y\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}l\right) \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} l.$$

Используя выражение для D_k и проинтегрировав по интервалу $-h \leq y \leq h$, получим, что должно выполняться условие

$$\left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \right] \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Вычисления ряда показывают, что это равенство действительно выполняется. Таким образом, последнее условие (2.3) выполняется в интегральном виде. Легко видеть, что и условия (2.2) для полученной функции $u(x, y)$ выполняются на обеих границах, а условия для функции $v(x, y)$ выполняются также в интегральном виде. Поэтому полученное решение задачи в виде найденных выражений для скоростей $u_x(x, y)$ и $u_y(x, y)$ можно считать приближенным в ячейке.

Ниже представлены графики безразмерных функций $u_x^*(x^*, y^*)$ и $v^*(x^*, y^*)$ в виде двух членов ряда их представления от безразмерных переменных $x^* = x/l$, $y^* = y/h$. Числовые значения приведены для случая квадратной ячейки $l = h$:

$$u_x^*(x, y) = \frac{u(x, y)}{U_0}, \quad v^*(x, y) = \frac{v(x, y)}{U_0}, \quad U_0 = \frac{4l^2}{\pi^2 \eta} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|.$$

Как видно из первого рисунка, скорость потока жидкости в центре ячейки близка к параболическому профилю, что и предполагалось в работе [10] для получения приближенного решения течения вязкой жидкости через периодическую систему частиц. При этом скорость жидкости $u_x(x, y)$ в точках с координатами $x = \pm l$; $y = \pm h$ равна нулю. Можно считать, что в этих точках находятся точечные частицы, образующие периодическую решетку.

Расход жидкости Q через площадку, образованную отрезком $[-h; h]$ и единичным отрезком, вдоль оси, перпендикулярной плоскости XY , равен

$$Q_c = \frac{h}{3\eta} (2h^2 + l^2) \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|.$$

Рис. 1. Трехмерный график функции $u_x^*(x^*, y^*)$ в ячейке.

Рис. 2. Контурный график функции $u_x^*(x^*, y^*)$ в ячейке.

Рис. 3. Контурный график функции $u_x^*(x^*, y^*)$ в трех ячейках.

Рис. 4. Контурный график функции $u_y^*(x^*, y^*)$ в ячейке.

Рис. 5. Контурный график функции $u_y^*(x^*, y^*)$ в трех ячейках.

В работе [15] дается обоснование образования периодического течения вместо течения Пуазёйля. Появление такого течения изменяет расход жидкости, так для течения в соответствии с законом Пуазёйля расход жидкости Q_p через площадку, образованную отрезком $[-3h; 3h]$, что соответствует трем ячейкам, равен

$$Q_p = \frac{18h^3}{\eta} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|.$$

Для случая, когда $l = h$, получим соотношение

$$\frac{Q_p}{3Q_c} = 6.$$

Итак, образование периодического течения уменьшает расход жидкости через единицу площади поперечного сечения по сравнению с классическим решением Пуазёйля. Как известно, в классической гидродинамике турбулентное течение также приводит к уменьшению расхода. Поэтому представленное выше решение можно рассматривать как некий аналог турбулентного течения через периодическую систему частиц.

3. Периодическое решение при заданном градиенте давления. Трехмерный случай течения жидкости

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим приведенную выше процедуру получения приближенного периодического решения для случая трехмерного течения жидкости. Разобьем всю область, занимаемую жидкостью, на участки размерами $2l$, $2h$, $2d$ по осям OX , OY и OZ соответственно. Выберем произвольную ячейку и поместим начало координат в центре такой ячейки, представляющей собой прямоугольную призму, ограниченную плоскостями $y = \pm h$, $x = \pm l$, $z = \pm d$. Необходимо найти такое решение уравнений (2.1), чтобы в соседних ячейках оно периодически повторялось. Аналогично двумерному случаю, такое решение должно удовлетворять граничным условиям для компонент вектора скорости и напряжений, имеющим вид (2.2) и (2.3), и добавленным условиям на новой поверхности.

Решение системы уравнений, аналогичной системе (2.4) в двумерном случае, будем искать в виде

$$u_x(x, y, z) = \frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2 + z^2 - d^2) + u(x, y, z),$$

$$u_y(x, y) = v(x, y), \quad u_z(x, z) = w(x, z).$$

Для функций $u(x, y, z)$, $v(x, y)$ и $w(x, z)$ получаем уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Условия на границах ячейки для компонент скорости жидкости выражений $u(x, y, z)$, $v(x, y)$, $w(x, z)$ имеют вид, аналогичный представленному для двумерного случая.

3.2. Метод решения и результаты

Частные решения первого уравнения (3.1), удовлетворяющие граничным условиям $u(x, y, z) = 0$ при $x = \pm l$, ищем методом разделения переменных:

$$u(x, y, z) = X(x)[Y(y) + Z(z)].$$

Подставляя это представление в первое уравнение (3.1), находим

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda, \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Z''}{Z} = -\chi.$$

Следуя процедуре, предложенной для двумерного случая, получаем следующие выражения для скоростей:

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[D_k \coth \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \cos \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[E_k \coth \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} z \right) \cos \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right], \\ v(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[D_k \sinh \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \sin \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right], \\ w(x, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[E_k \sinh \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} z \right) \sin \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right].\end{aligned}\quad (3.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned}D_k &= (-1)^{k+1} \frac{2l}{\eta \pi^2 (2k+1)^2 \sinh(\lambda_k h)} \frac{\partial p}{\partial x} h, \quad \lambda_k = \frac{\pi(2k+1)}{2l}, \\ E_k &= (-1)^{k+1} \frac{2l}{\eta \pi^2 (2k+1)^2 \sinh(\chi_k d)} \frac{\partial p}{\partial x} d, \quad \chi_k = \frac{\pi(2k+1)}{2l}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Ниже представлены графики безразмерной функции $u_x^*(x, y, z)$ в виде первых четырех членов ряда ее представления от безразмерных переменных $x^* = x/l$, $y^* = y/h$, $z^* = z/d$. В качестве характерной скорости U_0 взят параметр

$$U_0 = \frac{2l^2}{\pi^2 \eta} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|.$$

Рис. 6. Трехмерный и контурный график функции $u_x^*(x^*, y^*, z^*)$ в ячейке: (а, б) $x^* = 0$, (с, д) $x^* = 0.5$, (е, ф) $x^* = 1$.

Числовые значения приведены для случая кубической ячейки $l = h = d$ для интервала $0 \leq x \leq 1$. Поскольку скорость $u_x^*(x, y, z)$ — четная функция координат, то для интервала $-1 \leq x \leq 0$ получаем такие же графики. Как видно из рисунков, найденная скорость жидкости зависит от координат не по квадратичному закону, однако вблизи центра ячейки (точка с координатами $x^* = 0, y^* = 0$) ее профиль близок к параболическому, как и предполагалось в работе [8]. В соседних ячейках имеется такое же распределение скорости, удовлетворяющее условиям непрерывности скорости, касательных и нормальных напряжений на границе ячеек. С учетом того, что в угловых точках ячейки скорость жидкости равна нулю, аналогично двумерному случаю, полученное решение соответствует течению вязкой жидкости с заданным градиентом давления через периодическую систему точечных частиц. Используя этот подход, можно рассчитывать течение жидкости с заданным градиентом давления через бесконечную периодическую решетку частиц конечного размера, помещенных в угловых точках ячеек.

4. Периодическое решение при заданном градиенте температуры

Рассмотрим течение вязкой жидкости, вызванное приложенным градиентом температуры. Так же, как и в предыдущем случае, будем рассматривать неограниченную область, занятую вязкой жидкостью, в которой приложен постоянный градиент температуры ∇T , причем вектор ∇T перпендикулярен вектору ускорения силы тяжести $\mathbf{g}$. Выберем ось OX вдоль вектора ∇T , ось OY вдоль вектора $\mathbf{g}$. Будем рассматривать случай малых чисел Рейнольдса и Пекле. Последнее означает, что распределение температуры определяется только процессом теплопроводности жидкости, а не ее течением. В приближении малых чисел Рейнольдса имеем систему уравнений движения жидкости для скорости $\mathbf{u}$, давления p , плотности ρ [13]:

$$-\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} = 0, \quad \text{div } \rho \mathbf{u} = 0. \quad (4.1)$$

Будем рассматривать случай малой сжимаемости жидкости, когда

$$\begin{aligned} T(x) &= T_0 + \frac{\partial T}{\partial x} x, \\ \rho(x, y) &= \rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} x + \frac{\partial \rho}{\partial y} y + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} xy, \\ p(x, y) &= p_0 + \frac{\partial p}{\partial \rho} \rho(x, y), \quad \frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь ρ_0, p_0 — значения соответствующих величин в точке с координатами $x = 0, y = 0$. В двумерном случае система уравнений (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) &= 0, \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g &= 0, \\ \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из второго уравнения системы (4.3) с учетом соотношений (4.2) получаем

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho g.$$

Решение уравнения (4.4) имеет вид

$$\rho = \rho(x, 0) \exp\left(\frac{g}{c^2} y\right).$$

Учитывая соотношения (4.2), окончательно получаем:

$$\rho = \left(\rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} x\right) \exp\left(\frac{g}{c^2} y\right).$$

Для реальных параметров жидкости и значений y справедливо соотношение $gy/c^2 \ll 1$ и можно использовать приближение:

$$\exp\left(\frac{g}{c^2} y\right) \approx 1 + \frac{g}{c^2} y.$$

Поэтому получаем решение для плотности жидкости в виде

$$\rho = \rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} x + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{g}{c^2} xy.$$

Соответственно, учитывая соотношение (4.2), для функции давления получаем выражение

$$p = p_0 + c^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} x + g \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} xy,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} + g \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} y.$$

Из первого уравнения системы (4.1) следует, что скорость u_x жидкости должна быть пропорциональна градиенту температуры. Следовательно, величина ρu_x в линейном приближении по градиенту температуры представляется в виде

$$\rho u_x \approx \rho_0 u_x.$$

Поэтому третье уравнение системы (4.3) принимает вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0.$$

Это означает, что скорость жидкости есть функция только переменной y . Тогда первое уравнение системы (4.3) записывается в виде

$$-c^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} - g \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} y + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0.$$

Решение уравнения имеет вид

$$u_x = \frac{c^2}{2\eta} \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} y^2 + \frac{g}{3\eta} \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} (y^3 + Ay) + B.$$

Здесь A и B — константы интегрирования. С учетом того, что $gy/c^2 \ll 1$, можно ограничиться первым слагаемым и считать, что

$$u_x = \frac{c^2}{2\eta} \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} y^2. \quad (4.4)$$

Полученное выражение (4.4) означает, что фактически задача с заданным градиентом температуры свелась к задаче с заданным градиентом давления, рассмотренной в предыдущем разделе, и надо положить градиент давления

$$\frac{\partial p}{\partial x} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Поэтому для построения периодического решения задачи можно применить разработанную выше процедуру. Однако имеются и отличия. Так как для всех жидкостей выполняется условие

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} < 0,$$

то для того, чтобы знаки скоростей жидкости при заданном градиенте давления и температуры были одинаковыми, тем самым увеличивая расход через единицу площади поперечного сечения, необходимо, чтобы сами градиенты были противоположно направлены.

Необходимо отметить, что в реальных жидкостях коэффициент вязкости η также зависит от температуры. В линейном приближении по градиенту температуры коэффициент вязкости можно записать в виде

$$\eta = \eta_0 + \frac{\partial \eta}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} x.$$

Как было указано выше, скорость жидкости пропорциональна приложенному градиенту температуры. Из первого уравнения системы (4.1) следует, что учет зависимости коэффициента вязкости от температуры приводит к появлению в скорости жидкости слагаемых, квадратичных по градиенту температуры. Считая этот параметр достаточно малым, с точностью до линейных слагаемых по градиенту температуры и давления можно не учитывать зависимость коэффициента вязкости жидкости от температуры.

5. Заключение

Разработана процедура получения приближенного периодического решения течения вязкой жидкости в неограниченной области при наличии градиента давления. Процедура основана на разбиении области на ячейки прямоугольной формы (двумерный случай) или на ячейки в форме прямоугольной призмы (трехмерный случай) и нахождении решений, удовлетворяющих на границах этих ячеек условиям для скорости и напряжений, соответствующим периодическим функциям. Показано, что полученное периодическое движение можно рассматривать как течение жидкости через периодическую систему точечных частиц, помещенных в углах ячеек. Рассмотрен случай наличия в жидкости градиента температуры, направленного перпендикулярно силе тяжести. В предположении малой сжимаемости жидкости найдено, что задание градиента температуры также приводит к появлению периодической структуры течения жидкости. Процедура получения периодического

решения в этом случае аналогична той, что разработана для градиента давления. Найденные решения для скорости жидкости позволяют рассматривать фильтрацию вязкой жидкости через периодические структуры частиц конечных размеров, моделирующих пористую среду, и определять основные характеристики течения (например, расход жидкости) в зависимости от приложенных градиентов давления и температуры. В частности, получено, что увеличение расхода жидкости достигается при наличии противоположно направленных градиентов давления и температуры.

References

- [1] Happel J., Brenner H. *Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1965.
- [2] Gray W. G., Miller C. T. *Introduction to the thermodynamically constrained averaging theory for porous medium systems*, Cham: Springer, 2014.
- [3] Deryabina M. S., Martynov S. I. Simulation of the viscous flow with particles through cell porous medium, *Vychisl. Mekh. Sploshn. Sred*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 420–429 (Russian).
- [4] Brady J. F., Durlofsky L. J. The sedimentation rate of disordered suspensions, *Phys. Fluids*, 1988, vol. 31, pp. 717–727.
- [5] Hasimoto H. On the periodic fundamental solutions of the Stokes' equations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres, *J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 5, pp. 317–328.
- [6] Zick A. A., Homsy G. M. Stokes flow through periodic array of spheres, *J. Fluid Mech.*, 1982, vol. 115, pp. 13–26.
- [7] Mo G., Sangani A. S. A method for computing flow interactions among spherical objects and its application to suspensions of drops and porous particles, *Phys. Fluids*, 1994, vol. 6, no. 5, pp. 1637–1652.
- [8] Martynov S. I. Particle interaction in a flow with a parabolic velocity profile, *Fluid Dynam.*, 2000, vol. 35, no. 1, pp. 68–74; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Zidk. Gaza*, 2000, no. 1, pp. 84–91.
- [9] Martynov S. I. Hydrodynamic interaction of particles, *Fluid Dynam.*, 1998, vol. 33, no. 2, pp. 245–251; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Zidk. Gaza*, 1998, no. 2, pp. 112–119.
- [10] Martynov S. I. Viscous flow past a periodic array of spheres, *Fluid Dynam.*, 2002, vol. 37, no. 6, pp. 889–895; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Zidk. Gaza*, 2002, no. 6, pp. 48–54.
- [11] Martynov S. I., Syromyasov A. O. Symmetry of a periodic array of particles and a viscous fluid flow in the Stokes approximation, *Fluid Dynam.*, 2007, vol. 42, no. 3, pp. 340–353; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Zidk. Gaza*, 2007, no. 3, pp. 7–20.
- [12] Aristov S. N., Polyanin A. D. Exact solutions of three-dimensional nonstationary Navier–Stokes equations, *Dokl. Akad. Nauk*, 2009, vol. 427, no. 1, pp. 35–40 (Russian).
- [13] Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Non-uniform currents of Couette, *Nelin. Dinam.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 177–182 (Russian).
- [14] Knyazev D. V., Kolpakov I. Yu. Exact solutions of the problem of the flow of a viscous fluid in a cylindrical region with a varying radius, *Nelin. Dinam.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 89–97 (Russian).
- [15] Deryabina M. S., Martynov S. I. Construction of periodic solutions equations of motion of a viscous fluid with a predetermined pressure gradient, *Zh. SVMO*, 2016, vol. 18, no. 3, pp. 187–193 (Russian).
- [16] Landau L. D., Lifshitz E. M. *Course of theoretical physics: Vol. 6. Fluid mechanics*, 2nd ed., Oxford: Butterworth/Heinemann, 2003.
- [17] Sveshnikov A. G., Bogolyubov A. N., Kravtsov V. V. *Lectures on mathematical physics*, Moscow: MGU, 1993 (Russian).

Periodic flow of a viscous fluid with a predetermined pressure and temperature gradientMaria S. Deryabina¹, Sergey I. Martynov²^{1,2}Ugra State University,

ul. Chekhova 16, Khanty-Mansiysk, 119991, Russia

¹deryabinams@mail.ru, ²martynovsi@mail.ru

A procedure is proposed for constructing an approximate periodic solution to the equations of motion of a viscous fluid in an unbounded region in the class of piecewise smooth functions for a given gradient of pressure and temperature for small Reynolds numbers. The procedure is based on splitting the region of the liquid into cells, and finding a solution with boundary conditions corresponding to the periodic function. The cases of two- and three-dimensional flows of a viscous fluid are considered. It is shown that the solution obtained can be regarded as a flow through a periodic system of point particles placed in the cell corners. It is found that, in a periodic flow, the fluid flow rate per unit of cross-sectional area is less than that in a similar Poiseuille flow.

MSC 2010: 76D07, 76D09, 76D17

Keywords: viscous fluid, periodic solution, piecewise function, gradient, pressure, temperature

Received November 10, 2017, accepted March 06, 2018

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 81–97 (Russian)