ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 519.634

MSC 2010: 76B07, 76B10, 76B20

Кавитационное торможение твердого тела в возмущенной жидкости

М. В. Норкин

Исследуется задача о начальном этапе движения твердого тела в возмущенной жидкости в случае, когда его скорость уменьшается по линейному закону. Особенностью данной задачи является то, что при больших ускорениях возникают области низкого давления вблизи тела и образуются присоединенные каверны. В общем случае зона отрыва представляет собой несвязное множество. Важным аспектом работы является постановка задачи с односторонними ограничениями, на основе которой определяются первоначальные зоны отрыва частиц жидкости, а также формы внутренних свободных границ жидкости на малых временах. Рассматривается пример, в котором начальное возмущение жидкости вызвано безотрывным разгоном кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости. Для решения последней задачи применяется специальный приближенный метод (типа альтернирующего метода Шварца), основанный на предположении о том, что свободная поверхность жидкости удалена от плавающего тела на большие расстояния.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, кавитационное торможение, асимптотика, свободная граница, каверна, малые времена, число Фруда, число кавитации

При изучении вопросов, связанных с резко нестационарным взаимодействием твердых тел с жидкостью (удар, разгон, торможение), необходимо учитывать явление отрыва частиц жидкости от твердой поверхности. Отрыв важен для правильного определения реакции жидкости на тело, а также для более точного описания картины течения жидкости вблизи границы плавающего тела. Исследования по классическим смешанным задачам гидродинамического удара (постановка Л. И. Седова [1]) показали, что отрыв жидкости от тела

Получено 19 ноября 2016 года

После доработки 16 марта 2017 года

Норкин Михаил Викторович

norkinmi@mail.ru

Южный федеральный университет

344090, Россия, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

при ударе происходит в подавляющем большинстве случаев. При этом безотрывный удар возможен только для некоторого класса тел, плавающих на поверхности жидкости. Классическая задача об ударе с отрывом дает начальные условия для решения соответствующей динамической кавитационной задачи. Если закон движения тела после удара известен, то можно поставить вопрос об асимптотике решения данной задачи на малых временах. Наряду с задачей удара большой интерес представляет задача о движении тела в жидкости с постоянным ускорением (разгон или торможение). В ней отрыв возникает при плавном увеличении ускорения тела от небольших значений, при которых кавитации не наблюдается. Отметим, что уже в главном приближении по времени задача об отрывном разгоне или торможении тела в жидкости является динамической и зависит от физических параметров задачи (чисел Фруда и кавитации). При увеличении ускорения тела промежуток времени, на котором применимо главное приближение, уменьшается, и в предельном случае бесконечно больших ускорений данная задача переходит в задачу о мгновенном старте или мгновенной остановке тела в жидкости (то есть переходит в задачу удара). В задаче удара динамика и физические параметры проявляют себя только в следующих приближениях по времени (главное приближение соответствует классической модели удара). Таким образом, для изучения явления кавитации и определения формы каверны на малых временах при ударе плавающего тела желательно не ограничиваться классической моделью удара, а учесть следующие члены асимптотики по времени. В случае разгона или торможения тела в жидкости можно ограничиться только главным приближением.

В работах [2–4] рассматривалась задача о движении кругового цилиндра в жидкости после отрывного удара на малых временах с образованием каверны. Решение строилось с учетом двух важных физических условий: конечности скорости жидкости в точках отрыва (условие Кутты – Жуковского) и положительности давления на смоченной поверхности тела; при этом существенную роль играла динамика точек отрыва внутренней свободной границы жидкости. В статье [5] была предложена математическая модель отрывного разгона твердого тела в жидкости из состояния покоя с постоянным ускорением. Близкая задача проникания твердого тела в жидкость с образованием кавитационной зоны впереди тела изучена в [6–9].

Особенностью настоящей работы является то, что кавитация возникает не в покоящейся, а в первоначально возмущенной жидкости. Важным аспектом работы является постановка задачи с односторонними ограничениями и обоснование граничных условий типа неравенств для произвольного плоского контура с гладкой границей; кроме этого, важное значение имеет построение конкретного численного примера.

1. Постановка задачи

Рассматривается плоская задача о кавитационном торможении твердого тела в возмущенной жидкости со свободной поверхностью (рис. 1). Предполагается, что начальное возмущение жидкости вызвано горизонтальным и безотрывным движением тела вблизи ее свободной границы в промежутке времени $0 < t < t_*$. При $t > t_*$ скорость тела уменьшается по линейному закону (происходит торможение тела в жидкости). При быстром торможении возникают области низкого давления вблизи тела и образуются присоединенные каверны. Требуется определить формы внутренних свободных границ жидкости на малых временах и влияние на них характерных параметров задачи.

Основной математической моделью, используемой в работе, является модель идеальной несжимаемой жидкости. Течение жидкости предполагается безвихревым. При описании

Рис. 1. Постановка задачи

математической модели используются безразмерные переменные, а также подвижная система координат, связанная с телом. Переход к безразмерным переменным осуществляется по формулам

$$t_r = \frac{a}{v_0} \cdot t, \quad x_r = ax, \quad y_r = ay, \quad \Phi_r = av_0\Phi, \quad p_r = \rho v_0^2 p,$$

где индексом помечаются размерные величины, $\rho = \text{const}$ — плотность жидкости, v_0 — скорость тела в начальный момент времени $t = t_*$, a — характерный размер тела (в конкретном примере — радиус цилиндра).

Неподвижные координаты X, Y связаны с подвижными x, y следующими соотношениями: $X = x + h(t)$, $Y = y$.

В силу сделанных предположений потенциал скоростей Φ является гармонической функцией во всей области, занятой жидкостью:

$$\Delta\Phi = 0, \quad R \in \Omega(t). \quad (1.1)$$

На той части поверхности тела, на которой не происходит отрыва частиц жидкости, задается нормальная компонента скоростей точек поверхности тела

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \dot{h}(t)n_x, \quad R \in S_{11}(t), \quad (1.2)$$

где $\dot{h}(t)$ — скорость движения цилиндра:

$$\dot{h}(t) = 1 - \omega(t - t_*).$$

На внутренней и внешней свободных границах жидкости формулируются динамические и кинематические условия. Динамическое условие состоит в том, что давление p на свободной границе задано. На внешней свободной границе $S_2(t)$ действует атмосферное давление $p = p_a$. На внутренней свободной границе $S_{12}(t)$ (границе каверны) $p = p_c$, где p_c — давление насыщенных паров жидкости или газа либо давление газа в каверне при искусственной кавитации. Динамические граничные условия формулируются на основании интеграла Коши–Лагранжа, записанного в подвижной системе координат. Кинематическое условие заключается в том, что жидкие частицы на свободной поверхности движутся вместе с поверхностью, не покидая ее. Уравнения внешней и внутренней свободных границ относительно подвижной системы координат имеют вид

$$y = H + \xi(x, t); \quad r = R_0(\theta) + \eta(\theta, t).$$

Внутренняя свободная граница описывается в полярных координатах r, θ ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$), где $R_0(\theta)$ — параметрическое уравнение границы тела. Соответствующие кинематические уравнения получаются дифференцированием этих равенств по времени вдоль траектории движения жидкой частицы, находящейся на внешней или внутренней свободной границе. При этом учитывается связь между координатами x, y и X, Y . Окончательно граничные условия на $S_{12}(t)$ и $S_2(t)$ записываются в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \dot{h}(t) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \text{Fr}^{-2}(y - H) - 0.5\chi = 0, \quad R \in S_{12}(t), \quad (1.3)$$

$$\frac{(\Phi_x - \dot{h}(t)x + \Phi_y y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left[R'_0(\theta) + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right] \dot{\theta}(t) + \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad R \in S_{12}(t), \quad (1.4)$$

$$\dot{\theta}(t) = R^{-2} [\Phi_y x - (\Phi_x - \dot{h}(t))y],$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \dot{h}(t) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \text{Fr}^{-2}\xi(x, t) = 0, \quad R \in S_2(t), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \dot{h}(t) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad R \in S_2(t). \quad (1.6)$$

На бесконечности возмущения затухают:

$$\nabla \Phi \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Начальные условия включают в себя потенциал скоростей и возмущения свободных границ жидкости в момент времени $t = t_*$:

$$\Phi(x, y, t_*) = \Phi_0(x, y), \quad \xi(x, t_*) = \xi_0(x), \quad \eta(\theta, t_*) = 0. \quad (1.8)$$

Задача (1.1)–(1.8) содержит следующие безразмерные параметры:

$$\text{Fr} = \frac{v_0}{\sqrt{ga}}, \quad \chi = 2 \frac{p_a - p_c}{\rho v_0^2}, \quad \omega = \frac{\omega_0 a}{v_0^2}, \quad p_0 = \frac{p_a}{\rho v_0^2},$$

где Fr — число Фруда, χ — число кавитации, ω_0 — ускорение тела, g — ускорение свободного падения. Через ω и p_0 обозначены обезразмеренные величины ω_0 и p_a .

В точках пересечения внутренней свободной границы жидкости с поверхностью цилиндра (в точках отрыва) ставится условие Кутты–Жуковского, означающее, что скорость жидкости в этих точках должна быть конечной.

После нахождения потенциала скоростей Φ давление в жидкости определяется на основании интеграла Коши–Лагранжа:

$$p = p_0 - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \dot{h}(t) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \text{Fr}^{-2}(y - H) \right].$$

2. Вывод задачи с односторонними ограничениями

Исследования по отрывному разгону твердых тел в первоначально покоящейся жидкости показали, что отрыв происходит сразу по конечному и, в большинстве случаев, не маленькому участку поверхности тела [5]. При этом важную роль играют первоначальные зоны отрыва и контакта $S_{12}(t_*)$ и $S_{11}(t_*)$, которые получаются предельным переходом

при $t \rightarrow t_*$ границ $S_{12}(t)$ и $S_{11}(t)$. Для определения этих зон необходимо сформулировать дополнительные динамическое и кинематическое условия типа неравенств. Отметим, что предположение о внезапном появлении зоны отрыва сразу на конечном участке поверхности тела делалось также в работах, посвященных прониканию тел в жидкость на малых временах [7, 8].

Решение поставленной задачи на малых временах будем разыскивать в виде следующих асимптотических разложений ($\tau \rightarrow 0$, $\tau = t - t_*$):

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_0(x, y) + \tau \Phi_1(x, y) + o(\tau), \quad (2.1)$$

$$\xi(x, t) = \xi_0(x) + \tau \xi_1(x) + \tau^2 \xi_2(x) + o(\tau^2), \quad (2.2)$$

$$\eta(\theta, t) = \tau \eta_0(\theta) + \tau^2 \eta_1(\theta) + o(\tau^2). \quad (2.3)$$

Подставляя асимптотические формулы (2.1)–(2.3) в уравнение и краевые условия задачи (1.1)–(1.8), разложим граничные функции, определенные на возмущенных свободных границах $S_{12}(t)$ и $S_2(t)$, с помощью формулы Тейлора по степеням малого параметра τ . В результате придем к асимптотическим разложениям, коэффициенты которых определены уже на первоначальных свободных границах $S_{12}(t_*)$ и $S_2(t_*)$ (такая процедура называется сносом граничных условий на невозмущенный уровень). Аналогичное разложение имеет место и на невозмущенной части границы тела (в зоне контакта). Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях τ , получим для определения функции Φ_1 смешанную краевую задачу теории потенциала в первоначально невозмущенной области $\Omega(t_*)$. Учитывая еще дополнительные условия типа неравенств, придем к следующей задаче с односторонними ограничениями:

$$\Delta \Phi_1 = 0 \quad R \in \Omega(t_*), \quad \Phi_1 = f(\Phi_0) - \text{Fr}^{-2} \xi_0(x), \quad y = H + \xi_0(x), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = -\omega n_x, \quad 0.5\chi - \Phi_1 + f(\Phi_0) - \text{Fr}^{-2}(y - H) \geq 0, \quad R \in S_{11}(t_*), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \geq -\omega n_x, \quad 0.5\chi - \Phi_1 + f(\Phi_0) - \text{Fr}^{-2}(y - H) = 0, \quad R \in S_{12}(t_*), \quad (2.6)$$

$$f(\Phi_0) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi_0)^2. \quad (2.7)$$

В силу неизвестности зоны отрыва данная задача является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами. Поясним смысл граничных условий типа неравенств. Неравенство в (2.5) означает, что давление на смоченной поверхности тела (в главном приближении по времени) не опускается ниже давления в каверне. В естественной ситуации ($p_c \approx 0$) это условие означает, что давление должно быть неотрицательным. Для его получения нужно подставить разложение (2.1) в выражение для давления и ограничиться старшими членами. Неравенство в (2.6) говорит о том, что жидкие частицы не могут входить внутрь твердого тела, хотя им разрешается отрываться от твердой границы. Остановимся на выводе последнего условия более подробно. Подставляя разложения (2.1) и (2.3) в кинематическое уравнение внутренней свободной границы жидкости (1.4) и осуществляя процедуру сноса, получим для определения коэффициента $\eta_0(\theta)$ равенство

$$\eta_0(\theta) = R_0^{-1}(\theta) \sqrt{R_0'(\theta)^2 + R_0(\theta)^2} \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial n} - n_x \right].$$

Так как возмущение жидкости было вызвано безотрывным движением тела, потенциал Φ_0 , определяющий течение жидкости в начальный момент времени, должен удовлетворять условию безотрывного обтекания на всей поверхности тела. Следовательно, выражение

в квадратных скобках равно нулю. Таким образом, коэффициент $\eta_0(\theta) = 0$ и возмущение внутренней свободной границы жидкости на малых временах представимо в следующем виде ($\tau \rightarrow 0$):

$$\eta(\theta, t) = \tau^2 \eta_1(\theta) + o(\tau^2). \quad (2.8)$$

Повторяя указанную выше процедуру, получим для определения коэффициента $\eta_1(\theta)$ равенство

$$\eta_1(\theta) = 0.5 R_0^{-1}(\theta) \sqrt{R_0'(\theta)^2 + R_0(\theta)^2} \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + \omega n_x \right]. \quad (2.9)$$

Из асимптотической формулы (2.8) вытекает, что функция $\eta_1(\theta)$ должна быть неотрицательной. Действительно, нарушение этого условия означало бы, что при малых τ часть внутренней свободной границы находится внутри цилиндра, что невозможно. Из неотрицательности функции $\eta_1(\theta)$, на основании равенства (2.9), получим кинематическое условие в виде неравенства на $S_{12}(t_*)$ (формула (2.6)).

Также приведем формулы для определения коэффициентов разложения (2.2), которые получаются путем подстановки асимптотических выражений (2.1) и (2.2) в кинематическое уравнение внешней свободной границы жидкости (1.6) и применения указанных выше процедур:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} &= \xi_0'(x) \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - 1 \right] + \xi_1(x), \\ \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} \xi_1(x) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} &= \xi_0'(x) \left[\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} \xi_1(x) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \omega \right] + \xi_1'(x) \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - 1 \right] + 2\xi_2(x). \end{aligned}$$

Здесь частные производные вычисляются в точках первоначально возмущенной свободной границы (при $y = H + \xi_0(x)$).

Таким образом, если течение жидкости в начальный момент времени известно, то для определения первых малых членов разложений (2.2), (2.3) не требуется решения новых краевых задач (функция $\eta_0(\theta)$ оказывается равной нулю, а функция $\xi_1(x)$ явно выражается через функцию $\xi_0(x)$ и первые частные производные функции Φ_0 на первоначально возмущенной свободной границе). Коэффициенты $\eta_1(\theta)$ и $\xi_2(x)$ следующих членов асимптотических разложений находятся на основе решения задачи с односторонними ограничениями (2.4)–(2.7).

Отметим, что по своей структуре задача (2.4)–(2.7) совпадает с классической задачей об ударе с отрывом. Отсюда следует регулярность решения данной задачи в точках отрыва (выполнение условия Кутты–Жуковского) и возможность применения для ее решения известных численных методов. Регулярность решения задачи об ударе с отрывом хорошо известна. Теорема существования и единственности ее решения доказана в статье [10].

3. Начальные условия в возмущенной жидкости

Для решения задачи о кавитационном торможении цилиндра в возмущенной жидкости необходимо задать начальные условия, то есть определить потенциал скоростей $\Phi_0(x, y)$ и возмущение внешней свободной границы $\xi_0(x)$ при $t = t_*$. Так как сами эти функции и производные от потенциала $\Phi_0(x, y)$ входят в граничные условия задачи с односторонними ограничениями (2.4)–(2.7), для эффективного численного решения последней задачи

желательно иметь для функций $\Phi_0(x, y)$ и $\xi_0(x)$ простые аналитические выражения. На первый взгляд, проще всего возмутить жидкость с помощью удара плавающего тела, так как в этом случае функция $\xi_0(x) = 0$. Однако если тело полностью погружено в жидкость, то удар приводит к отрыву частиц жидкости от его поверхности и образованию растущей присоединенной каверны за телом, и уже в следующем приближении по времени необходимо учитывать динамику точек отрыва внутренней свободной границы жидкости [2–4]. Это создает определенные трудности для решения задачи о кавитационном торможении цилиндра после удара. Более простым способом является возмущение жидкости с помощью разгона плавающего тела (цилиндр движется из состояния покоя с постоянным ускорением). При небольшом ускорении цилиндра отрыва не происходит и вполне корректной оказывается задача о безотрывном обтекании. В литературе хорошо известны аналитические решения задачи разгона для случая кругового и эллиптического цилиндров, полученные с помощью асимптотического анализа на малых временах [11–15]. В настоящей работе для решения задачи о безотрывном движении кругового цилиндра в промежутке времени $0 < t < t_*$ применяется специальный приближенный метод (типа альтернирующего метода Шварца), основанный на предположении о том, что свободная поверхность жидкости удалена от плавающего тела на большие расстояния. Ранее такой подход использовался для учета влияния неподвижных твердых границ бассейна при вертикальном ударе плавающего тела [16, 17]. Идея метода состоит в том, чтобы свести исходную задачу для области сложной геометрической конфигурации к последовательному решению задач в областях, имеющих более простые формы границ. Таким образом, поочередно рассматриваются две задачи: случай $H = \infty$ и задача со свободной поверхностью при отсутствии плавающего тела. При этом каждый раз ликвидируются невязки, возникающие на свободной и твердой границах. Далее вкратце остановимся на основных этапах построения приближенного решения задачи о безотрывном движении кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости. Математическая постановка задачи включает в себя уравнение Лапласа, условие безотрывного обтекания на всей поверхности цилиндра, а также динамическое и кинематическое условия на свободной поверхности жидкости. Все рассуждения будем проводить для произвольного закона движения цилиндра $h(t)$ ($h(0) = 0$, $\dot{h}(0) = 0$), при этом время t играет роль параметра. Потенциал скоростей будем искать в виде ряда

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots,$$

где в качестве начального приближения u_0 выбирается решение задачи о движении кругового цилиндра в неограниченной жидкости:

$$u_0 = -\dot{h}(t) \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Чтобы ликвидировать невязки, создаваемые функцией u_0 на свободной поверхности жидкости, выражение $u_0 + u_1$ подставляется в соответствующие граничные условия и рассматривается задача для потенциала u_1 в области, ограниченной свободной поверхностью при отсутствии плавающего тела. После замены переменных $x \rightarrow Hx$, $y \rightarrow Hy$ в уравнении Лапласа и граничных условиях вида (1.5)–(1.6), функции $\varphi(x, y, t) = u_1(Hx, Hy, t)$, $\zeta(x, t) = \xi(Hx, t)$ представляются в виде разложений по степеням малого параметра H^{-1} :

$$\varphi(x, y, t) = H^{-1}\varphi_1(x, y, t) + H^{-2}\varphi_2(x, y, t) + H^{-3}\varphi_3(x, y, t) + \dots, \quad (3.1)$$

$$\zeta(x, t) = H^{-2}\zeta_1(x, t) + H^{-3}\zeta_2(x, t) + H^{-4}\zeta_3(x, t) + \dots \quad (3.2)$$

Подставляя эти разложения в преобразованные (после замены переменных) динамическое и кинематическое условия, осуществляя процедуру сноса граничных функций на первоначально невозмущенный уровень $y = 1$ и собирая коэффициенты при одинаковых степенях H^{-1} , получим для определения функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $(-\infty < x < \infty, -\infty < y < 1)$ с решениями вида

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y, t) &= \dot{h}(t) \cdot g_1(x, y), \quad \varphi_2(x, y, t) = -\text{Fr}^{-2} \int_0^t h(s) ds \cdot g_2(x, y), \\ \varphi_3(x, y, t) &= \text{Fr}^{-2} b_1(t) \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial x} + \text{Fr}^{-4} b_2(t) \cdot \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial y}, \\ g_1(x, y) &= \frac{x}{x^2 + (y-2)^2}, \quad g_2(x, y) = -\frac{4x(y-2)}{[x^2 + (y-2)^2]^2}, \\ b_1(t) &= 0.5 \int_0^t h^2(s) ds - h(t) \int_0^t h(s) ds, \quad b_2(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\tau ds \int_0^s h(r) dr.\end{aligned}$$

Для функций ζ_1, ζ_2 и ζ_3 приходим к следующим явным выражениям:

$$\begin{aligned}\zeta_1(x, t) &= h(t) \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}, \\ \zeta_2(x, t) &= h^2(t) \frac{2(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3} + \text{Fr}^{-2} \int_0^t dt \int_0^t h(s) ds \cdot \frac{4x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}, \\ \zeta_3(x, t) &= 12\text{Fr}^{-2} b_3(t) \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{(x^2 + 1)^4} + \text{Fr}^{-4} b_4(t) \frac{48x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^4} - h^3(t) \frac{8x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^4}, \\ b_3(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_0^\tau h^2(s) ds - h(t) \int_0^t d\tau \int_0^\tau h(s) ds, \quad b_4(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\tau ds \int_0^s dr \int_0^r h(p) dp.\end{aligned}$$

Теперь потенциал $u = u_0 + u_1$ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям на свободной поверхности жидкости, однако оставляет невязку в граничном условии на поверхности тела. Чтобы сформулировать задачу для ликвидации появившейся невязки, нужно построить асимптотику потенциала u_1 в окрестности смоченной поверхности тела. После обратной замены переменных $x \rightarrow H^{-1}x, y \rightarrow H^{-1}y$ функция $u_1(x, y, t) = \varphi(\varepsilon x, \varepsilon y, t)$, где $\varepsilon = H^{-1}$, раскладывается по формуле Тейлора с центром в точке $\varepsilon = 0$ ($H = \infty$):

$$u_1 = \frac{1}{4} \dot{h}(t) x H^{-2} + \frac{1}{4} \dot{h}(t) xy H^{-3} - \frac{1}{2} \text{Fr}^{-2} \int_0^t h(s) ds x H^{-3} + \frac{b_1(t)}{2\text{Fr}^2} H^{-3} + O(H^{-4}).$$

В результате для потенциала u_1 получено весьма простое асимптотическое выражение, позволяющее с его помощью поставить задачу для устранения невязок на смоченной поверхности тела (случай $H = \infty$). Решение последней задачи представляется в виде

$$\begin{aligned}u_2 &= \frac{1}{4} \dot{h}(t) \frac{x}{x^2 + y^2} H^{-2} + \frac{1}{4} \dot{h}(t) \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} H^{-3} - \frac{1}{2} \text{Fr}^{-2} \int_0^t h(s) ds \frac{x}{x^2 + y^2} H^{-3} + \\ &+ O(H^{-4}), \quad H \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Дальше процесс построения последовательных приближений повторяется. Отметим, что на следующем этапе уточнению подлежит не только потенциал скоростей, но и возмущение внешней свободной границы жидкости. Функция $u_0 + u_1 + u_2$ удовлетворяет уравнению Лапласа и краевому условию на поверхности тела, но при этом создает невязки в граничных условиях на свободной поверхности жидкости. Для их ликвидации снова рассматривается задача со свободной поверхностью при отсутствии плавающего тела. Подставляя функцию $u_0 + u_1 + u_2 + u_3$ в динамическое и кинематическое условия на свободной поверхности жидкости и делая замену переменных $x \rightarrow Hx$, $y \rightarrow Hy$, представим новые функции $\psi(x, y, t) = u_3(Hx, Hy, t)$ и $\eta(x, t)$ в виде разложений

$$\psi(x, y, t) = \psi_1(x, y, t)H^{-3} + \dots, \quad \eta(x, t) = \eta_1(x, t)H^{-4} + \dots,$$

где $\eta(x, t)$ — поправка для функции $\xi(Hx, t)$, возникающая на данном этапе (втором шаге) итерационного метода:

$$\xi(Hx, t) = \zeta(x, t) + \eta(x, t).$$

Осуществляя процедуру сноса граничных функций на невозмущенный уровень и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях H^{-1} , найдем функции $\psi_1(x, y, t)$ и $\eta_1(x, t)$:

$$\psi_1(x, y, t) = -\frac{1}{4}\varphi_1(x, y, t), \quad \eta_1(x, t) = -\frac{1}{4}\zeta_1(x, t).$$

После этого строится асимптотика функции u_3 в окрестности смоченной поверхности тела и ставится задача для потенциала u_4 , устраняющая соответствующие невязки. Нетрудно убедиться, что асимптотика функции u_4 начинается с членов порядка H^{-4} .

Окончательно, собирая найденные приближения, получим асимптотику потенциала скоростей u , которая справедлива в любой фиксированной (не зависящей от H) окрестности смоченной поверхности тела:

$$u = -\dot{h}(t)\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{4}\dot{h}(t)\left[x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right]H^{-2} + \frac{1}{4}\dot{h}(t)\left[xy + \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}\right]H^{-3} - \\ - \frac{1}{2\text{Fr}^2}\int_0^t h(s)ds\left[x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right]H^{-3} + \frac{b_1(t)}{2\text{Fr}^2}H^{-3} + O(H^{-4}), \quad H \rightarrow \infty.$$

Заметим, что следующие приближения добавляют в асимптотику потенциала скоростей u в окрестности смоченной поверхности тела члены порядка H^{-4} , а в асимптотику функции $\xi(Hx, t)$ — члены порядка H^{-5} . Таким образом, найденные члены являются правильными.

Полученные формулы также позволяют определить потенциал скоростей u вблизи внешней свободной границы жидкости.

В результате начальные условия $\Phi_0(x, y)$ и $\xi_0(x)$ находятся с помощью простых аналитических формул:

$$\Phi_0(x, y) = u(x, y, t_*), \quad \xi_0(x) = \zeta(H^{-1}x, t_*) + \eta(H^{-1}x, t_*).$$

Преимущество предложенного метода состоит в том, что он позволяет строить асимптотики потенциала скоростей u в окрестности смоченной поверхности тела и функции $\xi(Hx, t)$ для произвольного закона движения цилиндра $h(t)$. Это дает возможность аналитически

решать задачи с переключениями режимов на некотором начальном промежутке времени. В частности, можно рассмотреть случай, когда после короткого разгона под свободной поверхностью жидкости цилиндр начинает двигаться с постоянной скоростью. Подробный численный анализ этой задачи проведен в статье [18]. Сравнение показывает, что для $Fr = 1$, $H = 2$, $t = 2$ (переключение режима происходит при $t = 1$) форма свободной поверхности, полученная на основании явных аналитических формул, хорошо согласуется с аналогичным результатом статьи [18]. Следует отметить, что полученные формулы фактически не учитывают нелинейные члены $0.5(\nabla u)^2$ и $(\partial \xi / \partial x)(\partial u / \partial x)$ в граничных условиях вида (1.5) и (1.6) (вместо Φ используется u). Для их учета необходимо выписать еще два члена асимптотики. Таким образом, если цилиндр удален от свободной границы на расстояние порядка характерного размера тела и движение происходит на небольших временах, то при определении начальных условий можно ограничиться только линейным приближением.

4. Численная реализация и анализ результатов

Для решения задачи с односторонними ограничениями (2.4)–(2.7) применяется специальный итерационный метод, сводящий решение исходной нелинейной задачи (с неизвестной зоной отрыва) к последовательному решению линейных краевых задач с фиксированным разбиением границы тела на области задания краевых условий типа Дирихле – Неймана. В качестве начального приближения в этом итерационном процессе выбирается решение смешанной краевой задачи (2.4)–(2.7) (без учета неравенств) с такой маленькой зоной $S_{12}(t_*)$, в окрестности которой нарушается динамическое условие в виде неравенства (формула (2.5)). Отметим, что левая часть этого неравенства равна разности $p - p_c$, причем в естественной ситуации $p_c = 0$. Численные расчеты показывают, что при удалении от точки отрыва функция $p - p_c$ вначале убывает, достигает отрицательного минимума, а затем возрастает до положительных значений. Точки, в которых функция $p - p_c$ принимает локальные отрицательные минимумы, выбираются за следующие приближения к точкам отрыва. Далее процесс повторяется. Каждый следующий шаг итерационного процесса приводит к некоторому увеличению зоны $S_{12}(t_*)$ и уменьшению зоны отрицательных значений функции $p - p_c$. Процесс заканчивается, когда зона отрицательных значений исчезает. Итерационный метод сходится достаточно быстро. Для определения угловых координат точек отрыва с двумя верными знаками после запятой требуется не более 20–30 итераций. После окончания итерационного процесса проверяется выполнение кинематического условия в виде неравенства в (2.6). Заметим, что условие положительности функции $p - p_c$ будет выполнено и для большей зоны $S_{12}(t_*)$, однако при увеличении этой зоны нарушается указанное кинематическое условие. Таким образом, данный метод позволяет однозначно определить зону отрыва $S_{12}(t_*)$. Отметим также, что полученные на каждом шаге итерационного процесса линейные задачи решаются численно методом конечных элементов с использованием пакета FreeFem++. Указанный итерационный метод применялся ранее в задачах гидродинамики и теории упругости с неизвестными априори областями контакта. В статье [19] этот метод впервые был применен для исследования классических задач удара твердых тел, плавающих на поверхности жидкости. Данный итерационный процесс использовался также в работах [2–5].

Теперь перейдем к исследованию задачи. Предположим, что начальное возмущение жидкости вызвано безотрывным разгоном кругового цилиндра ($0 < t < t_*$) с постоянным (безразмерным) ускорением ω_* , связанным с t_* равенством $\omega_* = t_*^{-1}$.

Вначале рассмотрим кавитационное торможение цилиндра, которое характеризуется следующими значениями параметров: $Fr = 3$, $\chi = 4$, $p_0 = 2$, $H = 1.8$, $\omega = 4$, $t_* = 1$ (в естественной ситуации $p_c \approx 0$). На рисунке 2 изображены фигуры, соответствующие моментам времени $t = 1.25$ ($\dot{h}(t) = 0$) и $t = 1.5$ ($\dot{h}(t) < 0$). Угловые координаты точек отрыва здесь $\theta_1 = -0.90$, $\theta_2 = 0.83$.

Рис. 2. Образование одной каверны: $p_c = 0$, $\tau = 0.25$, 0.5 .

На рисунке 3 показаны две каверны, которые получаются при учете искусственной кавитации. Эти картины соответствуют различным числам кавитации ($\chi = 1.5$ и $\chi = 0.8$). Безразмерное ускорение цилиндра $\omega = 2$, остальные параметры не меняются. Угловые координаты точек отрыва ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$) равны, соответственно, $(0.42, 1.41, -1.32, -0.62)$ и $(0.07, 1.58, -1.38, -0.38)$. При дальнейшем уменьшении параметра χ (увеличении давления в кавернах) зоны отрыва сливаются, образуя одну большую каверну впереди тела (рис. 4, $\chi = 0.2$). С другой стороны, при увеличении значения χ (уменьшении давления в кавернах) зоны отрыва уменьшаются и совсем исчезают.

Рис. 3. Образование двух каверн при искусственной кавитации: $\chi = 1.5, 0.8$, $\tau = 0.5$.

Рис. 4. Образование одной большой каверны при уменьшении числа кавитации: $\chi = 0.2$, $\tau = 0.5$.

Рис. 5. Формы свободных границ при изменении параметров задачи: $Fr = 1.5$, $\chi = 3$, $\tau = 0.7$.

Обратим внимание на то, что при изменении параметров задачи картина течения может измениться. На рисунке 5 показаны форма каверны и конфигурация внешней свободной поверхности жидкости, соответствующие следующим значениям параметров: $Fr = 1.5$, $\chi = 3$, $p_0 = 1.5$ (естественная ситуация), $H = 1.8$, $\omega = 4$, $t_* = 1$, $t = 1.7$. При уменьшении числа кавитации зона отрыва перемещается в верхнюю часть эллипса. При этом вторая зона

отрыва появляется только при отрицательных значениях χ (давление в каверне больше атмосферного).

Отметим, что в примерах, соответствующих естественной ситуации, после обращения скорости в нуль рассматривается короткий разгон цилиндра в противоположном направлении. Другие примеры показывают совместное действие больших ускорений и искусственной кавитации. Предполагается, что непосредственно перед началом торможения в сторону жидкости со стороны тела выделяется газ постоянного давления. Так как расположение зон отрыва, а также их связность заранее не известны, то можно считать, что подача газа осуществляется по всей границе тела. В такой постановке вполне корректным оказывается динамическое граничное условие типа неравенства, означающее, что давление в зоне контакта не может опуститься ниже давления в каверне.

Заключение

В работе предложена математическая модель кавитационного торможения твердого тела в возмущенной жидкости, эффективная на малых временах. В математическом плане дело сводится к решению смешанной краевой задачи теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела. По своей структуре данная модель совпадает с классической задачей об ударе с отрывом, что позволяет применять для ее решения известные численные методы. Рассмотрен численный пример, в котором начальное возмущение жидкости вызвано безотрывным разгоном кругового цилиндра на малых временах.

Список литературы

- [1] Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. 2-е изд., испр. Москва: Наука, 1966. 448с.
- [2] Norkin M., Korobkin A. The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder // J. Eng. Math., 2011, vol. 70, no. 1, pp. 239–254.
- [3] Норкин М. В. Движение кругового цилиндра в жидкости после удара на малых временах с образованием каверны // Изв. РАН. Механика жидкости и газа, 2012, № 3, с. 101–112.
- [4] Норкин М. В. Образование каверны при наклонном отрывном ударе кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости // Сиб. журн. индустр. матем., 2016, т. 19, № 4, с. 81–92.
- [5] Норкин М. В. Образование каверны на начальном этапе движения кругового цилиндра в жидкости с постоянным ускорением // Прикл. мех. и техн. физ., 2012, т. 53, № 4, с. 74–82.
- [6] Korobkin A. Cavitation in liquid impact problems // Proc. of the 5th Intern. Symp. on Cavitation (Osaka, Japan, 1–4 Nov., 2003), Paper Cav03-OS-7-011.
- [7] Khabakhpasheva T. I., Korobkin A. A. Oblique impact of a smooth body on a thin layer of inviscid liquid // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Sci., 2013, vol. 469, no. 2151, 2012.0615, 14 pp.
- [8] Reinhard M., Korobkin A. A., Cooker M. J. Cavity formation on the surface of a body entering water with deceleration // J. Eng. Math., 2016, vol. 96, no. 1, pp. 155–174.
- [9] Ткачева Л. А. Удар тела с плоским дном по тонкому слою жидкости под малым углом // Изв. РАН. Механика жидкости и газа, 2013, № 3, с. 77–91.
- [10] Юдович В. И. Однозначная разрешимость задачи об ударе с отрывом твердого тела о неоднородную жидкость // Владикавк. матем. журн., 2005, т. 7, № 3, с. 79–91.
- [11] Tyvand P. A., Miloh T. Free-surface flow due to impulsive motion of a submerged circular cylinder // J. Fluid Mech., 1995, vol. 286, pp. 67–101.

- [12] Tyvand P. A., Miloh T. Free-surface generated by a small submerged circular cylinder starting from rest // *J. Fluid Mech.*, 1995, vol. 286, pp. 103–116.
- [13] Tyvand P. A., Landrini M. Free-surface flow of a fluid body with an inner circular cylinder in impulsive motion // *J. Eng. Math.*, 2001, vol. 40, no. 2, pp. 109–140.
- [14] Макаренко Н. И., Костиков В. К. Неустановившееся движение эллиптического цилиндра под свободной поверхностью // *Прикл. мех. и техн. физ.*, 2013, т. 54, № 3, с. 30–41.
- [15] Kostikov V. K., Makarenko N. I. The motion of elliptic cylinder under free surface // *J. Phys. Conf. Ser.*, 2016, vol. 722, no. 1, 012021, 6 pp.
- [16] Норкин М. В. Об учете влияния стенок бассейна произвольной формы при безотрывном ударе плавающего тела // *Прикл. мех. и техн. физ.*, 2001, т. 42, № 1, с. 77–81.
- [17] Норкин М. В. Вертикальный удар твердого тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости в ограниченном бассейне произвольной формы // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*, 2002, № 3, с. 114–122.
- [18] Горлов С. И. Нестационарная нелинейная задача о горизонтальном движении контура под границей раздела двух жидких сред // *Прикл. мех. и техн. физ.*, 1999, т. 40, № 3, с. 37–43.
- [19] Дворак А. В., Тесёлкин Д. А. Численное исследование двумерных задач об импульсивном движении плавающих тел // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1986, т. 26, № 1, с. 144–150.

Cavitation braking of a rigid body in a perturbed liquid

Michail V. Norkin

Southern Federal University
ul. Milchakova 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia
norkinmi@mail.ru

This paper is concerned with the problem of the initial stage of motion of a rigid body in a perturbed liquid when its speed decreases under the linear law. A special feature of this problem is that at large accelerations there are areas of low pressure near the body and attached cavities are formed. Generally the zone of separation is an incoherent set. An important aspect of this study is the problem definition with boundary conditions like inequalities on the basis of which initial zones of separation of particles of the liquid and forms of internal free borders of the liquid on small times are defined. An example is considered in which the initial perturbation of the liquid is caused by a continuous dispersal of the circular cylinder under the free surface of the heavy liquid. A special asymptotic method (like the alternating method of Schwartz) based on the assumption that the free surface of the liquid is at large distances from the floating body is applied to the solution of the last problem.

MSC 2010: 76B07, 76B10, 76B20

Keywords: ideal incompressible liquid, cavitation braking, asymptotics, free border, cavity, small times, Froude's number, cavitation number

Received November 19, 2016, accepted March 16, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 181–193 (Russian)