ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 539.3
MSC 2010: 74H60

Контактное взаимодействие двух балок Тимошенко

О. А. Салтыкова, В. А. Крысько

В работе построена математическая модель контактного взаимодействия двух геометрически нелинейных балок модели С.П.Тимошенко. На одну из балок действует поперечная знакопеременная нагрузка. Бесконечномерная задача сводится к конечномерной с помощью метода конечных разностей второго порядка. Полученная задача Коши решается методом Рунге–Кутты 4-го порядка. Контактное давление определяется по методу Б. Я. Кантора. Анализ полученных результатов осуществляется методами нелинейной динамики и качественной теории дифференциальных уравнений. Исследован сценарий перехода колебаний структуры от гармонических к хаотическим. Выявлено, что форма колебаний балок становится несимметричной при первой бифуркации, но одновременно возникает хаотическая фазовая синхронизация колебаний. Построены карты динамических режимов для обеих балок.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, балка Тимошенко, метод конечных разностей, нелинейная динамика, фазовая синхронизация

Получено 15 сентября 2016 года
После доработки 1 декабря 2016 года

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-11-10138.

Салтыкова Ольга Александровна
olga_a_saltykova@mail.ru
Крысько Вадим Анатольевич
tak@san.ru

Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина
410054, Россия, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

1. Введение

Балки и балочные структуры часто подвергаются различным внешним динамическим воздействиям, и характер их колебаний существенно зависит от величины зазора между ними, поэтому необходимо исследовать их нелинейную динамику и контактное взаимодействие. Хорошо известны такие теории изгиба балок, как теория Эйлера–Бернулли [1], Рэлея [3] (первого приближения), С. П. Тимошенко [15, 24] (второго приближения), Пелеха–Шереметьева [17] и Левинсона–Рэдди [21, 23] (третьего приближения). Мы остановимся на теории С. П. Тимошенко, позволяющей учитывать деформации, связанные с поперечными сдвигами, и инерцию вращения. В работе исследуются большие зазоры между балками (больше четверти толщины балки), то есть требуется учесть большие углы поворота, которые учитываются по теории Кармана.

В отечественной и зарубежной научной литературе можно найти большое количество работ, посвященных исследованию балок, пластин и оболочек в рамках моделей Тимошенко и Пелеха–Шереметьева [2, 8, 21, 23, 25]. Еще шире круг работ с исследованиями по модели Эйлера–Бернулли [3, 5–7, 9, 11–14, 20, 22]. Контактные задачи с использованием модели первого приближения решены в работах [4, 10, 12, 17, 18], в трехмерной постановке — в работе [19]. Однако исследования контактного взаимодействия балок, описываемого моделью Тимошенко, нами не найдено.

Целью исследования является изучение хаотической динамики и контактного взаимодействия двух балок с зазором между ними (зазор равен толщине балок), описываемых моделью С. П. Тимошенко при больших прогибах; одна из балок находится под действием внешней поперечной знакопеременной распределенной нагрузки.

2. Уравнения движения балок

Обе балки изучаемой структуры описаны моделью С. П. Тимошенко, то есть поперечные сечения остаются плоскими, но не перпендикулярными деформированной оси балки.

Тангенциальные перемещения $u^z = u(x, z, t)$, $w^z = w(x, z, t)$ распределены по толщине $\{-h \leq z \leq h\}$ по линейному закону $u_z = u + z\gamma_x$, $w_z = w$, где $\gamma_x = \gamma_x(x, t)$ — угол поворота нормали к линии $z = 0$ (рис. 1). Тогда

$$e_{xx}^z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}, \quad e_{xz}^z = \gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (2.1)$$

Второе слагаемое в выражении для e_{xx}^z (2.1) определяет геометрическую нелинейность по фон Карману.

Контактное давление учитывается по методу Б. Я. Кантора [4], то есть оно исключается из числа искомых функций и является непрерывной функцией, равной нулю на границах зон контакта. Итеративный процесс решения нелинейных уравнений совмещается с процессом уточнения областей контакта и становится единым процессом решения геометрически и конструктивно нелинейной задачи.

В указанной системе координат структура из двух балок определяется как двумерная область Ω следующим образом (рис. 1):

$$\Omega = \{x \in [0, a]; -h \leq z \leq h_k + 3h\}, \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

Рис. 1. Модель С. П. Тимошенко

Рис. 2. Расчетная схема.

Уравнение движения балок, а также граничные и начальные условия получены из энергетического принципа Гамильтона – Остроградского. Исходные уравнения движения для пакета из двух балок Тимошенко в безразмерном виде записываются следующим образом [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \gamma_{x1}}{\partial x} \right) + \frac{1}{\lambda^2} (L_1(w_1, u_1) + 1.5L_2(w_1, w_1) + L_3(w_1, u_1)) + \frac{1}{\lambda^2} q + \\ \quad + K(w_1 - w_2 - h_k)\Psi - \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \varepsilon_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + L_4(w_1, w_1) - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{x1}}{\partial x^2} - 8\lambda^2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \gamma_{x1} \right) - \frac{\partial^2 \gamma_{x1}}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \gamma_{x2}}{\partial x} \right) + \frac{1}{\lambda^2} (L_1(w_2, u_2) + 1.5L_2(w_2, w_2) + L_3(w_2, u_2)) - \\ \quad - K(w_1 - w_2 - h_k)\Psi - \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \varepsilon_1 \frac{\partial w_2}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + L_4(w_2, w_2) - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{x2}}{\partial x^2} - 8\lambda^2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} + \gamma_{x2} \right) - \frac{\partial^2 \gamma_{x2}}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_1(w_i, u_i) &= \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial u_i}{\partial x}, & L_2(w_i, w_i) &= \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \right)^2, \\ L_3(w_i, u_i) &= \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, & L_4(w_i, w_i) &= \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \end{aligned}$$

— нелинейные операторы, учитывающие большие углы поворота, K — коэффициент жесткости трансверсального обжатия структуры в зоне контакта, h_k — зазор между балками,

w_i — функции прогибов балок, u_i — функции перемещения срединной поверхности, γ_{xi} — функция поперечного сдвига.

Введены безразмерные переменные

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{w}{2h}, & \bar{u} &= \frac{ua}{(2h)^2}, & \bar{x} &= \frac{x}{a}, & \lambda &= \frac{a}{(2h)}, & \bar{q} &= q \frac{a^4(1-\nu^2)}{(2h)^4 E}, \\ \bar{t} &= \frac{t}{\tau}, & \tau &= \frac{a}{c}, & c &= \sqrt{\frac{Eg}{(1-\nu^2)\rho}}, & \bar{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_1 \frac{a}{c}, & \bar{\gamma}_x &= \frac{\gamma_x a}{(2h)}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

В системе уравнений (2.1) функция Ψ определена формулой $\Psi = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(w_1 - h_k - w_2)]$; $\Psi = 1$, если есть контакт между балками (то есть $w_1 > w_2 + h_k$), иначе контакта нет.

На первую балку действует поперечная распределенная по поверхности знакопеременная нагрузка вида

$$q = q_0 \sin(\omega_p t), \quad (2.4)$$

где q_0 — амплитуда, ω_p — частота вынуждающих колебаний.

К системе уравнений (2.2) следует присоединить граничные и начальные условия.

Нелинейность системы (2.2) обусловлена геометрической нелинейностью, учитываемой по модели фон Кармана (2.1), и контактными взаимодействиями балок, введенным по модели Б. Я. Кантора [4].

Полученные системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (2.2) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных разностей с аппроксимацией второго порядка. Полученная задача Коши по времени решается методом Рунге–Кутты 4-го порядка. Для обеспечения достоверности численных результатов было проведено сравнение результатов, получаемых методом конечных разностей с аппроксимациями четвертого и шестого порядков, а также методом Рунге–Кутты высших порядков.

Описанный алгоритм решения исследовался с точки зрения сходимости по пространственной и временной сетке на основании принципа Рунге; число разбиений по длине было взято равным $n_x = 40$, а шаг по времени $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$. Решение поставленной задачи осуществляется методами нелинейной динамики и качественной теории дифференциальных уравнений: строятся сигналы, спектры мощности Фурье, сечения Пуанкаре, фазовые портреты для каждой балки. Применяются вейвлет преобразования Морле, проводится анализ знаков показателей Ляпунова, строятся автокорреляционные функции, эпюры прогибов. Опираясь на полученные данные, делается вывод о динамике структуры, состоящей из двух балок Тимошенко в зависимости от управляющих параметров с учетом больших прогибов.

На основании описанного алгоритма создан программный комплекс, позволяющий решать поставленную задачу в зависимости от управляющих параметров. В качестве управляющих параметров могут рассматриваться амплитуда и частота вынуждающих колебаний, величина зазора между балками, геометрические параметры балок, граничные условия.

3. Исследование хаотической динамики и контактного взаимодействия двух балок Тимошенко

Рассмотрим нелинейные колебания двух изотропных упругих балок, квадратного поперечного сечения одинаковой толщины, с зазором между ними $h_k = 1$.

Граничные условия для заделки на обоих концах балки:

$$\begin{aligned}w_i(0, t) = w_i(a, t) = 0, \quad u_i(0, t) = u_i(a, t) = 0, \\ \gamma_{x_i}(0, t) = \gamma_{x_i}(a, t) = 0, \quad i = 1, 2.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Исследуем нелинейную динамику описанной структуры при следующих параметрах: $\lambda = \frac{a}{2h} = 50$, $\varepsilon_1 = 1$, $\omega_p = 5.1$. Частота вынуждающих колебаний близка к частоте собственных линейных колебаний балки. Для удобства будем обозначать балку, к которой приложена нагрузка, как балка 1, а вторую — как балка 2. Последняя приводится в движение только за счет контакта с балкой 1.

Для исследования нелинейной динамики и контактного взаимодействия описанной структуры был разработан пакет программного обеспечения, позволяющий строить карты динамических режимов на основе анализа спектра мощности Фурье, знаков ляпуновских показателей, сечения Пуанкаре, фазовых портретов, фурье-анализа в зависимости от управляющих параметров — амплитуды и частоты вынуждающих колебаний $\{q_0, \omega_p\}$. Карты представляют собой графическое отображение анализа результатов решения динамической задачи. Так как динамика балок различна, то и карты будем строить для каждой балки.

На рисунке 3 приведем карты динамических режимов балок при $h_k = 1$, в зависимости от управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$. Условные обозначения для карт приведены там же. Разрешение карты 400×400 , то есть для получения одной карты динамических режимов было проанализировано $16 \cdot 10^4$ вариантов. На персональном компьютере с процессором Intel Core i5 расчет занимает примерно 60 суток.

Наличие карт динамических режимов позволяет осуществлять управление исследуемой структурой. Область гармонических колебаний и колебаний на независимой частоте балки 1 (рис. 3а) полностью совпадает с областью затухающих колебаний балки 2 (рис. 3б). Как только амплитуда вынуждающих колебаний становится достаточно большой, чтобы колебания второй балки стали незатухающими, колебания структуры становятся хаотическими. Зоны хаотических колебаний балок совпадают. В центральной области карт находятся самые большие области хаотических колебаний, а наиболее устойчивыми являются области высокочастотных колебаний.

Исследуем сценарий перехода к хаосу с помощью анализа основных динамических характеристик, таких как сигнал, спектр мощности Фурье, фазовый портрет, вейвлет-спектр Морле. Вейвлет-преобразование является своего рода «математическим микроскопом», позволяющим видеть динамику частот во времени, в отличие от спектра мощности Фурье. В работе [8] было выявлено, что наиболее информативным при исследовании нелинейной динамики балок является вейвлет-спектр Морле.

При проведении исследования используется метод изучения фазовой хаотической синхронизации механических динамических систем на базе вейвлет-анализа. Для описания и анализа фазовой хаотической синхронизации вводится фаза хаотического сигнала. Фазовая хаотическая синхронизация означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, причем амплитуды этих сигналов остаются не связанными друг с другом и выглядят хаотическими. Захват фаз влечет за собой совпадение частот сигналов. Темные зоны вейвлет-спектра соответствуют фазовой синхронизации колебательного процесса балок.

На рисунках 4 и 5 приведем основные характеристики колебательного процесса и графики фазовой синхронизации для зазора $h_k = 1$ и нагрузки $q_0 = 44 \cdot 10^3$ для балки 1 и 2

Рис. 3. Карты динамических режимов для балок 1 и 2: (а) карта динамических режимов в зависимости от управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$ для балки 1, (б) карта динамических режимов в зависимости от управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$ для балки 2, (с) условные обозначения^а.

соответственно. На рисунках 6 и 7 те же характеристики при амплитуде $q_0 = 45 \cdot 10^3$. Динамические характеристики балки 1 обозначены красным цветом, а балки 2 — синим.

Отметим, что спектры мощности Фурье (рис. 4–7б) и фазовые портреты (рис. 4–7с) приведены для установившихся режимов колебаний ($t \in [300; 1324]$), а вейвлет-спектры Морле (рис. 4–7д) приведены для всего временного интервала $t \in [0; 600]$, поэтому на вейвлет-спектрах можно четко видеть частотные изменения колебательного процесса во времени.

На рисунке 8 приведен вейвлет-анализ фазовой синхронизации колебаний балок.

^аДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1701004/>

Рис. 4. Динамические характеристики балки 1 при $q_0 = 44 \cdot 10^3$, $h_k = 1$, отражающие первую бифуркацию Хопфа.

Рис. 5. Динамические характеристики балки 2 при $q_0 = 44 \cdot 10^3$, $h_k = 1$, отражающие первую бифуркацию Хопфа.

Рис. 6. Динамические характеристики балки 1 при $q_0 = 45 \cdot 10^3$, $h_k = 1$, отражающие серию бифуркаций Хопфа.

Рис. 7. Динамические характеристики балки 1 при $q_0 = 45 \cdot 10^3$, $h_k = 1$, отражающие серию бифуркаций Хопфа.

Рис. 8. Фазовая синхронизация при $q_0 = 44 \cdot 10^3$.

Первое касание балок происходит при $q_0 = 4.3 \cdot 10^3$. Колебания первой балки при $q_0 = 4.3 \cdot 10^3$ двухчастотные, значения частот линейно независимые. При $q_0 = 20 \cdot 10^3$ колебания балок хаотические. Синхронизации колебаний не происходит. Увеличение амплитуды вынуждающих колебаний до $q_0 = 30 \cdot 10^3$; $40 \cdot 10^3$ приводит к регуляризации колебаний балок, колебательный процесс начинает синхронизироваться. При $q_0 = 40 \cdot 10^3$ колебания синхронизируются на низких частотах. При $q_0 = 44 \cdot 10^3$ колебания синхронизируются, начиная с $t \approx 220$ — момента бифуркации. В этот же момент времени происходит первая бифуркация (рис. 4b, d, рис. 5b, d). Имеет место полная фазовая синхронизация колебаний балок. Спектры мощности Фурье полностью совпадают (рис. 4, 5c). Вейвлет-спектры качественно совпадают, отметим появление частоты $\omega_p/2 = 2.55$ при $t \in (200; 300)$ (рис. 4, 5d). Фазовый портрет второй балки представляет собой пересечение двух колец (рис. 5c). При $q_0 = 45 \cdot 10^3$ происходит еще две бифуркации, возникают частоты $\omega_p/4 = 1.275$ и $\omega_p/8 = 0.6375$ (рис. 6, 7b). На вейвлет-спектрах хорошо виден временной интервал их возникновения (рис. 6, 7d).

При $q_0 = 44 \cdot 10^3$ на вейвлет-спектрах Морле, как для балки 1 (рис. 4d), так и для балки 2 (рис. 5d) при $t \approx 220$ четко виден момент бифуркации. При $t < 220$ на вейвлет-спектрах присутствует только частота вынуждающих колебаний. Для балки 1 (рис. 4d) амплитуда частоты $\omega_p/2 = 2.55$ существенно меньше амплитуды вынуждающих колебаний, а в случае балки 2 при $t > 220$ исчезает частота вынуждающих колебаний и балка колеблется только на частоте бифуркации (рис. 5d). Отметим, что спектр мощности Фурье демонстрирует обе частоты (рис. 5b), но амплитуда частоты ω_p меньше, чем $\omega_p/2$. При $q_0 = 45 \cdot 10^3$ перестройка режима колебаний балок происходит при $t \approx 250$ (рис. 6, 7d). В случае балки 1 (рис. 6d) при $t > 250$ амплитуда частоты ω_p уменьшается, но она четко выражена на вейвлете, чего нельзя сказать о балке 2 (рис. 7d), где частота ω_p фактически исчезает, проявляясь только в некоторые моменты времени, в то же время возрастает амплитуда частоты $\omega_p/2 + \omega_p/4 \approx 3.75$. Таким образом, вейвлеты Морле для балок демонстрируют качественное совпадение частотных характеристик колебаний, но в то же время позволяют видеть отличия от Фурье-спектра.

Колебания балок синхронизируются на трех частотах, начиная с $t = 250$. До этого момента времени колебания синхронизируются на частоте вынуждающих колебаний (рис. 8). Дальнейшее увеличение амплитуды приводит к хаотическим колебаниям и синхронизации колебаний на частоте вынуждающих колебаний. Увеличение амплитуды вынуждающих колебаний приводит к синхронизации колебательного процесса в состоянии хаоса — хаотиче-

а) эпюры прогиба балки 1 — симметричные

б) эпюры прогиба балки 2 — симметричные

в) эпюры прогиба балки 1 — несимметричные

г) эпюры прогиба балки 2 — несимметричные

Рис. 9. Эпюры прогибов балок при $q_0 = 44 \cdot 10^3$, в разные моменты времени.

ской синхронизации колебательного процесса. Переход к хаосу произошел через серию бифуркаций удвоения периода. В работе [5] при изучении перехода к хаотическим колебаниям балок Тимошенко выявлен сценарий Рюэля – Такенса – Ньюхауза.

Остановимся подробнее на моменте, когда происходит синхронизация колебаний при $q_0 = 44 \cdot 10^3$. Контакт балок в центре происходит в начальный момент времени, далее балки в центре не взаимодействуют, но тем не менее наблюдается фазовая синхронизация. Для объяснения этого явления были исследованы эпюры прогибов балок в разные моменты времени. На рисунке 9 приведем эпюры прогибов балок в разные моменты времени. Время указано на графиках. На рисунках 9а, б приведены эпюры прогибов до бифуркации при $t < 200$, а на рисунках 9с, д — после первой бифуркации при $t > 200$.

Обнаружено, что эпюры балок симметричны до $t = 200$, то есть до момента бифуркации. Далее эпюры несимметричны, балки взаимодействуют не в центре, но имеет место явление фазовой синхронизации колебаний.

4. Выводы

В работе приведены карты динамических режимов колебаний двух балок в зависимости от управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$, с учетом их контактного взаимодействия в случае больших прогибов. Установлено, что наиболее устойчивыми являются области высокочастотных колебаний балок.

Выявлено, что переход колебаний от гармонических и квазигармонических (для балки 1) и затухающих (балка 2) к хаотическим происходит одновременно для обеих балок, как только амплитуда колебаний будет достаточной, чтобы колебания балки 2 не оставались затухающими. Увеличение амплитуды вынуждающих колебаний ведет к хаотической синхронизации колебательного процесса через серию бифуркаций.

Переход колебаний структуры от гармонических колебаний к хаотическим произошел через серию бифуркаций удвоения периода.

Впервые обнаружено явление синхронизации колебаний с течением времени при возникновении несимметричных форм колебаний после бифуркации. Описано явление хаотической фазовой синхронизации применительно к задаче о колебаниях двух балок, возбуждаемых внешним периодическим воздействием.

References

- [1] Volmir A. S. *Nonlinear dynamics of plates and shells*, Moscow: Nauka, 1972 (Russian).
- [2] Grigoluk E. I., Selezov I. T. *Non-classical theory of vibrations of rods, plates and shells*, Itogi Nauki Tekh. Ser. Mekh. Deform. Tverd. Tela, vol. 5, Moscow: VINITI, 1973 (Russian).
- [3] Erofeev V. I., Kazhaev V. V., Lisenkova E. E., Semerikova N. P. Dynamic behaviour of Bernoulli – Euler, Rayleigh and Timoshenko beam models, lying on an elastic foundation (comparative analysis), *Vestn. Nighegorodsk. Univ.*, 2011, no. 5(3), pp. 274–278 (Russian).
- [4] Cantor B. Ja., Bogatyrenko T. L. A method for solving contact problems of nonlinear shell theory, *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR, Ser. A*, 1986, no. 1, pp. 18–21 (Russian).
- [5] Krysko V. A., Zhigalov M. V., Saltykova O. A. Nonlinear dynamics of beams of Euler – Bernoulli and Timoshenko type, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mashinostr.*, 2008, no. 6, pp. 7–27 (Russian).
- [6] Krysko V. A., Zhigalov M. V., Saltykova O. A. Features of composite chaotic fluctuations of Euler – Bernoulli beams and those of Timoshenko type subject to edge conditions, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Stroit.*, 2008, no. 9, pp. 4–10 (Russian).

- [7] Desyatova A. S., Krysko V. A., Saltykova O. A., Zhigalov M. V. Dissipative dynamics of geometrically nonlinear Bernoulli – Euler beams, *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, no. 6, pp. 948–956; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2008, no. 6, pp. 128–136.
- [8] Krysko V. A., Zhigalov M. V., Soldatov V. V., Podturkin M. N. On the choice of the type of wavelet in the study of nonlinear oscillations of beams considering transverse shear, *Vestn. SGTU*, 2009, vol. 3, no. 1(40), pp. 14–22 (Russian).
- [9] Krysko A. V., Zhigalov M. V., Mitskevich S. A., Zagniboroda N. A., Dobriyan V. V., Kutepov I. E., Krysko V. A. Nonlinear dynamics of vibration micromechanical gyroscopes: 2. Calculation of the resonator in the form of a beam with the initial abnormality regarding geometrical non-linearity, *Vestn. SGTU*, 2012, vol. 3, no. 1(67), pp. 7–15 (Russian).
- [10] Kulikov G. M., Plotnikova S. V., Kazakov D. V. Contact problem for the elastic plate and rigid body: 1. Geometrically linear formulation, *Vestn. TGTU*, 2004, vol. 10, no. 1B, pp. 180–194 (Russian).
- [11] Mitskevich S. A., Zaharova A. A., Krysko A. V. Steady vibrations beam MEMS resonator in a viscous medium under the action of a local shock, in *Computer science and information technology*, T. V. Semenova, A. G. Fedorova (Eds.), Saratov: Nauka, 2016, pp. 277–280 (Russian).
- [12] Osipenko M. A. On the accuracy of the Euler – Bernoulli model in contact problems for beams, *Vestn. IzhGTU*, 2013, no. 2, pp. 55–64 (Russian).
- [13] Saltykova O. A., Papkova I. V., Kashubina A. A., Sinichkina A. O., Vetsel S. S., Krysko V. A. Transition scenarios of the flexible Euler – Bernoulli beams from harmonic to chaotic vibrations under arbitrary transversal loads, *Vestn. SGTU*, 2015, vol. 2, no. 1(79), pp. 9–17 (Russian).
- [14] Sinichkina A. O., Krylova E. Yu., Mitskevich S. A., Krysko V. A. Dynamics of elastic beams under impact loading, accounting for white noise, *Probl. Prochn. Plastichn.*, 2016, vol. 78, no. 3, pp. 280–288 (Russian).
- [15] Tymoshenko S. P. *Stability rods, plates and shells: Selected works*, Moscow: Fizmatgiz, 1971 (Russian).
- [16] Sheremet'ev M. P., Pelekh B. L. Construction of the refined theory of plates, *Inzh. Zhurn.*, 1964, vol. 4, no. 3, pp. 34–41 (Russian).
- [17] Yakovleva T. V., Krylova E. Yu., Bazhenov V. G., Krysko V. A. Complicated fluctuations and contacting the plate, supported by a beam with a gap between them, under extreme loading conditions, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Stroit.*, 2016, no. 3, pp. 13–23 (Russian).
- [18] Yakovleva T. V., Bazhenov V. G., Krysko V. A., Krylova E. Yu. Contact interaction plates, reinforced by ribs, with gaps under the influence of white noise, *Vestn. PNIPU. Mekh.*, 2015, no. 4, pp. 259–272 (Russian).
- [19] Krysko A. V., Awrejcewicz J., Saltykova O. A., Vetsel S. S., Krysko V. A. Nonlinear dynamics and contact interaction of the structures composed of beam-beam and beam-closed cylindrical shell members, *Chaos Solitons Fractals*, 2016, vol. 91, pp. 622–638.
- [20] Krysko V. A., Zhigalov M., Soldatov V., Mitskevitch S., Kuznetsova E. S., Shagivaleev K. F., Awrejcewicz J., Mrozowski J. Investigation of nonlinear dissipative chaotic dynamics of plates and shells, in *Shell structures: Theory and applications: Proc. of the 9th SSTA Conf. (Jurata, Poland, 14–16 Oct 2009)*, W. Pietraszkiewicz, I. Kreja (Eds.), London: CRC, 2009, pp. 175–178.
- [21] Levinson M. A new rectangular beam theory, *J. Sound Vibration*, 1981, vol. 74, no. 1, pp. 81–87.
- [22] Manoach E., Warminski J., Mitura A., Samborski S. Dynamics of a composite Timoshenko beam with delamination, *Mech. Res. Commun.*, 2012, vol. 46, pp. 47–53.
- [23] Reddy J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates, *J. Appl. Mech.*, 1984, vol. 51, no. 4, pp. 745–752.
- [24] Timoshenko S. P. On the correction for shear of differential equation for transverse vibration of prismatic bar, *Philos. Mag.*, 1921, vol. 41, no. 36, pp. 744–746.
- [25] Xu R., Wu Y. Static, dynamic, and buckling analysis of partial interaction composite members using Timoshenko's beam theory, *Int. J. Mech. Sci.*, 2007, vol. 49, no. 10, pp. 1139–1155.

The contact interaction of two Timoshenko beams

Olga A. Saltykova¹, Vadim A. Krysko²

^{1,2}Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
ul. Politehnicheskaya 77, Saratov, 410054, Russia

¹olga_a_saltykova@mail.ru, ²tak@san.ru

A mathematical model of contact interaction of two geometrically nonlinear S.P. Timoshenko beams is obtained. The transverse alternating load acts on one of the beams. The infinite-dimensional problem is reduced to a finite-dimensional one by using the second-order finite difference method. The Cauchy problem obtained is solved by the Runge–Kutta method of 4th order. The contact pressure is determined by B. Ya. Kantor's method. The analysis of the results is carried out by methods of nonlinear dynamics and qualitative theory of differential equations. The scenario of transition of vibrations of the structure from harmonic to chaotic ones is studied. It is found that the shape of the beams' vibrations becomes asymmetric in the event of the first bifurcation, but at the same time, there comes a phase synchronization of chaotic vibrations. Maps of the dynamic behavior for both beams are constructed.

MSC 2010: 74H60

Keywords: contact interaction, Timoshenko beam, finite difference method, nonlinear dynamics, phase synchronization

Received September 15, 2016, accepted December 1, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 1, pp. 41–53 (Russian)