ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.938.5+531.38

MSC 2010: 70E05, 70E17, 37J35, 34A05

Дискриминантное множество и бифуркационная диаграмма интегрируемого случая М. Адлера и П. ван Мёрбеке

П. Е. Рябов, Е. О. Бирючева

В работе приводится в явном виде спектральная кривая и дискриминантное множество интегрируемого случая М. Адлера и П. ван Мёрбеке. Предъявлены характеристические показатели для определения типа критических точек ранга 0 и 1 отображения момента. С помощью критических точек ранга 0 и 1 отображения момента предлагается алгоритм выделения бифуркационной диаграммы отображения момента из вещественной части дискриминантного множества. Алгоритм работает при условии, что вещественная часть дискриминантного множества содержит бифуркационную диаграмму.

Ключевые слова: интегрируемые гамильтоновы системы, спектральная кривая, бифуркационная диаграмма

Получено 29 августа 2016 года

После доработки 20 сентября 2016 года

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00119, 16-01-00170 и совместного гранта РФФИ и АВО № 15-41-02049.

Рябов Павел Евгеньевич

peryabov@fa.ru

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

125993, Россия, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 49

Институт машиноведения РАН им. А. А. Благодатова

119334, Россия, г. Москва, ул. Бардина, д. 4

Московский физико-технический институт (государственный университет)

141701, Россия, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

Бирючева Екатерина Олеговна

biryucheva.katerina@gmail.com

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

1. Введение

Как известно, общий случай интегрируемости, изученный М. Адлером и П. ван Мёрбеке [1], является в динамике твердого тела одним из наиболее сложных. Его появлению в отечественной литературе мы обязаны прежде всего работам А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [2, 3], посвященным интегрированию уравнений Эйлера на конечномерных группах Ли. Другим случаем интегрируемости на $so(4)$, открытым позже и не менее сложным, является случай Борисова–Мамаева–Соколова [4], для которого найдены инвариантные соотношения третьей степени. В результате на $so(4)$ возникает новое семейство интегрируемых квадратичных гамильтонианов с дополнительным интегралом четвертой степени. Существование дополнительного интеграла четвертой степени, найденного в [1], связано с особой симметрией $so(4)$, допускающей вещественное представление в виде прямой суммы $so(3) \oplus so(3)$. Уравнения Эйлера на алгебре Ли $so(4) = so(3) \oplus so(3)$ также описывают вращение твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение [5–8]. Эти уравнения исследовал В. А. Стеклов [9] в качестве модели вращения Земли. Современный обзор интегрируемых семейств метрик определенного вида на $so(4)$ и их механическая интерпретация содержится в книгах [10–15].

Фазовая топология интегрируемого случая М. Адлера и П. ван Мёрбеке до сих пор не исследовалась. На первом этапе топологического анализа необходимо найти бифуркационную диаграмму отображения момента. Вопросам анализа особенностей спектральной кривой и ее связи с бифуркационной диаграммой отображения момента посвящены работы [16–23].

В настоящей работе приводится в явном виде спектральная кривая и дискриминантное множество интегрируемого случая М. Адлера и П. ван Мёрбеке. Предъявлены характеристические показатели для определения типа критических точек ранга 0 и 1 отображения момента. Показано, как с помощью невырожденных особенностей ранга 0 и 1 отображения момента можно выделить бифуркационную диаграмму отображения момента из вещественной части дискриминантного множества спектральной кривой, ассоциированной с $L - A$ парой интегрируемого случая М. Адлера и П. ван Мёрбеке. Алгоритм выделения бифуркационной диаграммы из дискриминантного множества работает при условии, что вещественная часть дискриминантного множества содержит бифуркационную диаграмму.

2. Гамильтониан и фазовое пространство.

Дополнительный интеграл

Уравнения движения имеют вид уравнений Пуанкаре–Жуковского–Ламба

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{3} \mathbf{S} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{S}}, \quad (2.1)$$

где трехмерный вектор $\mathbf{M}$ имеет смысл кинетического момента системы «тело + жидкость», а компоненты трехмерного вектора $\mathbf{S}$ пропорциональны компонентам вектора *завихренности жидкости*.

На коалгебре $\mathfrak{g} = so(4)^*$ ($so(4) = so(3) \oplus so(3)$) с координатными функциями $\mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \mathbf{S})$ определены скобки Ли–Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, S_j\} = 0, \quad \{S_i, S_j\} = -\frac{1}{3} \varepsilon_{ijk} S_k. \quad (2.2)$$

Скобка (2.2) имеет две функции Казимира

$$F_1 = (M, M), \quad F_2 = (S, S). \quad (2.3)$$

Как известно, для заданной функции Гамильтона H от M, S уравнения движения с помощью скобки Ли–Пуассона можно записать в гамильтоновой форме

$$\dot{x} = \{x, H\}. \quad (2.4)$$

Здесь x — любая из переменных M_i, S_j .

На совместном уровне функций Казимира

$$\mathcal{P}_{a,b}^4 = \{F_1 = a^2, F_2 = b^2\} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \quad (2.5)$$

индуцированная скобка Пуассона невырождена и ограничение системы (2.4) дает гамильтонову систему с двумя степенями свободы.

Рассмотрим следующий гамильтониан

$$H = (M, AM) + 2(M, BS) + (S, CS), \quad (2.6)$$

где диагональные (3×3) -матрицы A, B, C имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}[\alpha_2^2 \alpha_3^2, \alpha_1^2 \alpha_3^2, \alpha_1^2 \alpha_2^2], \\ B &= \text{diag}[(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_2 \alpha_3, (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_1 \alpha_3, (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_1 \alpha_2], \\ C &= \text{diag}[\alpha_2 \alpha_3(\alpha_2 \alpha_3 - 4\alpha_1^2), \alpha_1 \alpha_3(\alpha_1 \alpha_3 - 4\alpha_2^2), \alpha_1 \alpha_2(\alpha_1 \alpha_2 - 4\alpha_3^2)]. \end{aligned}$$

Чтобы утверждать, что система является вполне интегрируемой по Лиувиллю, необходимо указать еще один независимый первый интеграл, находящийся в инволюции с гамильтонианом (2.6). Мы приводим дополнительный интеграл в следующей симметричной форме:

$$\begin{aligned} K &= 3 \sum_{i,j} \alpha_i (\alpha_j - \alpha_i) M_j S_j S_i^2 + \sum_i (\alpha_i - \alpha_j)(\alpha_i - \alpha_k) M_i S_i^3 - \\ &- (M, M) \sum_i [\alpha_j \alpha_k M_i S_i + 2(\alpha_j^2 + \alpha_k^2) S_i^2]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Отметим, что выражение (2.7) отличается от форм дополнительного интеграла, использованных в оригинальных работах, посвященных доказательству алгебраической интегрируемости (см. [1, 11]). Дополнительный интеграл (2.7) наиболее приближен по виду к интегралам, указанным в работе [25] и в книге [14].

Теорема 1. $\{H, K\} = 0$, если $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

3. Представление Лакса и спектральная кривая

В работе [24] А. Рейман и М. Семенов-Тянь-Шанский указали для интегрируемого случая М. Адлера и П. ван Мёрбеке представление Лакса со спектральным параметром $\dot{L}(z) = [L(z), A(z)]$. Рассмотрим, следуя результатам работы [24], представление Лакса со спектральным параметром

$$\dot{L}(z) = [L(z), A(z)],$$

где матрицы L и A имеют вид

$$L(z) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(M_3 + S_3) & \frac{1}{2}(M_2 + S_2) & -\frac{1}{2}(M_1 - S_1) & 0 & 0 & \alpha_1 z \\ \frac{1}{2}(M_3 + S_3) & 0 & -\frac{1}{2}(M_1 + S_1) & -\frac{1}{2}(M_2 - S_2) & 0 & \alpha_2 z & 0 \\ -\frac{1}{2}(M_2 + S_2) & \frac{1}{2}(M_1 + S_1) & 0 & -\frac{1}{2}(M_3 - S_3) & \alpha_3 z & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(M_1 - S_1) & \frac{1}{2}(M_2 - S_2) & \frac{1}{2}(M_3 - S_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 z & 0 & 0 & S_1 & -S_2 \\ 0 & \alpha_2 z & 0 & 0 & -S_1 & 0 & S_3 \\ \alpha_1 z & 0 & 0 & 0 & S_2 & -S_3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A(z) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(u_3 + v_3) & \frac{1}{2}(u_2 + v_2) & -\frac{1}{2}(u_1 - v_1) & 0 & 0 & b_1 z \\ \frac{1}{2}(u_3 + v_3) & 0 & -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) & -\frac{1}{2}(u_2 - v_2) & 0 & b_2 z & 0 \\ -\frac{1}{2}(u_2 + v_2) & \frac{1}{2}(u_1 + v_1) & 0 & -\frac{1}{2}(u_3 - v_3) & b_3 z & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(u_1 - v_1) & \frac{1}{2}(u_2 - v_2) & \frac{1}{2}(u_3 - v_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 z & 0 & 0 & v_1 & -v_2 \\ 0 & b_2 z & 0 & 0 & -v_1 & 0 & v_3 \\ b_1 z & 0 & 0 & 0 & v_2 & -v_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

В приводимых выше формулах необходимо произвести замену

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{2}{3} \alpha_2 \alpha_3 (S_1 \alpha_2 \alpha_3 - M_1 \alpha_2 \alpha_3 - 4S_1 \alpha_1^2 - 2M_1 \alpha_1^2), \\ v_2 &= \frac{2}{3} \alpha_3 \alpha_1 (S_2 \alpha_3 \alpha_1 - M_2 \alpha_3 \alpha_1 - 4S_2 \alpha_2^2 - 2M_2 \alpha_2^2), \\ v_3 &= \frac{2}{3} \alpha_1 \alpha_2 (S_3 \alpha_1 \alpha_2 - M_3 \alpha_1 \alpha_2 - 4S_3 \alpha_3^2 - 2M_3 \alpha_3^2), \\ u_1 &= 2\alpha_2 \alpha_3 (M_1 \alpha_2 \alpha_3 - S_1 \alpha_2 \alpha_3 - 2S_1 \alpha_1^2), \\ u_2 &= 2\alpha_3 \alpha_1 (M_2 \alpha_3 \alpha_1 - S_2 \alpha_3 \alpha_1 - 2S_2 \alpha_2^2), \\ u_3 &= 2\alpha_1 \alpha_2 (M_3 \alpha_1 \alpha_2 - S_3 \alpha_1 \alpha_2 - 2S_3 \alpha_3^2), \\ b_1 &= \frac{4}{3} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (2\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1^2), \quad b_2 = \frac{4}{3} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (2\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2^2), \quad b_3 = \frac{4}{3} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (2\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3^2). \end{aligned}$$

Спектральная кривая $\mathcal{E}(z, \zeta)$, ассоциированная с матрицей $L(z)$, определяется как алгебраическая кривая

$$\mathcal{E}(z, \zeta) = \{(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : \det(L(z) - \zeta E) = 0\}, \quad (3.1)$$

где через E обозначена единичная матрица соответствующего размера.

Спектральная кривая (3.1) для $L - A$ пары Реймана и Семенова-Тян-Шанского имеет явный вид

$$\mathcal{E}(z, \zeta) : \quad \zeta \cdot \left(\sum_{i=0}^3 d_{2i} \zeta^{2i} \right) = 0, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned}d_6 &= 16, \quad d_4 = -16(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)z^2 + 8(a^2 + 3b^2), \\d_2 &= [a^2 + 3b^2 - 4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)z^2]^2, \\d_0 &= -16\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2z^6 + 4hz^4 - 4[b^2(b^2 + 3a^2)(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + k]z^2 + b^2(a^2 - b^2)^2.\end{aligned}$$

Здесь a, b, h, k — постоянные казимиров F_1, F_2 и первых интегралов H, K .

В таком виде спектральная кривая представлена здесь впервые и именно дополнительный интеграл в виде (2.7) был найден как соответствующий коэффициент в выражении для d_0 спектральной кривой (3.2).

4. Дискриминантное множество спектральной кривой

Кривую (3.2) можно рассматривать как нулевой уровень отображения $\mathcal{E}: \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Обозначим через $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}^4(a, b, k, h)$ множество таких значений интегральных постоянных, для которых 0 является критическим значением отображения $\mathcal{E}$. Множество $\tilde{\Sigma}$ в конечных точках $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ определяется системой уравнений

$$\mathcal{E}(z, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{E}(z, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta}\mathcal{E}(z, \zeta) = 0. \quad (4.1)$$

В работах [17, 20] множество $\tilde{\Sigma}$ называется дискриминантным множеством спектральной кривой $\mathcal{E}(z, \zeta)$.

Теорема 2. Дискриминантное множество $\tilde{\Sigma}$ является объединением поверхностей кратных корней многочленов $P(t)$ и $Q(s)$, где

$$\begin{aligned}P(t) &= 16\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2t^3 - 4ht^2 + 4[b^2(b^2 + 3a^2)(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + k]t - b^2(a^2 - b^2)^2, \\Q(s) &= 16(\alpha_1 - \alpha_2)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2(\alpha_2 + 2\alpha_1)^2s^3 + 12[9h - 4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)(a^2 + 3b^2)]s^2 + \\&\quad + 12[a^2(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)(a^2 - 21b^2) - 9k]s - a^2(a^2 - 9b^2)^2.\end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим нетривиальную часть спектральной кривой $\mathcal{E}(z, \zeta)$:

$$\sum_{i=0}^3 d_{2i}\zeta^{2i} = 0.$$

Тогда система (4.1) сводится к двум возможностям: либо

$$\begin{aligned}\zeta &= 0, \\P(t) &= P'(t) = 0,\end{aligned}$$

либо к системе из трех уравнений

$$\begin{cases}16s^3 + [8a^2 + 24b^2 - (16\alpha_1^2 + 16\alpha_2^2 + 16\alpha_3^2)t]s^2 + [3b^2 + a^2 - (4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_2^2)t]^2s - \\- 16\alpha_3^2t^3\alpha_2^2\alpha_1^2 + 4ht^2 - [4b^2(b^2 + 3a^2)(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + 4k]t + b^2(a^2 - b^2)^2 = 0, \\- 4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)s^2 - 2[3b^2 + a^2 - 4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)t](\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)s - \\- 12\alpha_3^2\alpha_2^2\alpha_1^2t^2 + 2ht - b^2(b^2 + 3a^2)(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) - k = 0, \\48s^2 + 16[a^2 + 3b^2 - 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)t]s + [3b^2 + a^2 - 4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)t]^2 = 0.\end{cases} \quad (4.2)$$

В обоих случаях использованы переменные $t = z^2, s = \zeta^2$.

Подставим в систему (4.2) условие коммутирования первых интегралов $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ (например, выражая $\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2$). В результате такой подстановки третье уравнение системы (4.2) раскладывается в произведение двух множителей:

$$[4s - 4t(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + a^2 + 3b^2][12s - 4t(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + a^2 + 3b^2] = 0.$$

Откуда

$$s = (\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)t - \frac{1}{4}(a^2 + 3b^2), \quad (4.3)$$

либо

$$s = \frac{1}{3}(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)t - \frac{1}{12}(a^2 + 3b^2). \quad (4.4)$$

В случае (4.3) первые два уравнения системы (4.2) приводят к поверхности кратных корней многочлена $P(t)$, то есть $P(t) = P'(t) = 0$, а в случае (4.4) — к системе $Q(t) = Q'(t) = 0$. ■

Предложение 1. Поверхности кратных корней многочленов $P(t)$ и $Q(s)$ имеют следующее параметрическое представление:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : & \begin{cases} h(t) = 8\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2t + \frac{b^2(a^2 - b^2)^2}{4t^2}, \\ k(t) = 4\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2t^2 - b^2(b^2 + 3a^2)(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + \frac{b^2(a^2 - b^2)^2}{2t}, \end{cases} \\ \gamma_2 : & \begin{cases} h(s) = -\frac{8}{27}(\alpha_1 - \alpha_2)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2(\alpha_2 + 2\alpha_1)^2s - \frac{a^2(a^2 - 9b^2)^2}{108s^2} + \\ + \frac{4}{9}(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)^2(a^2 + 3b^2), \\ k(s) = -\frac{4}{27}(\alpha_1 - \alpha_2)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2(\alpha_2 + 2\alpha_1)^2s^2 - \frac{a^2(a^2 - 9b^2)^2}{54s} + \\ + \frac{a^2(a^2 - 21b^2)}{9}(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2). \end{cases} \end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно разрешить системы уравнений $P(t) = P'(t) = 0$ и $Q(s) = Q'(s) = 0$ относительно h и k . ■

На рисунке 1 изображена вещественная часть дискриминантного множества $\tilde{\Sigma}$ и его увеличенный фрагмент для следующих значений параметров: $a = 0.66$, $b = 0.86$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.77$.

Точкам пересечения P_i дискриминантных кривых отвечают следующие значения параметров t_i , s_i и h_i , k_i :

$$\begin{aligned} P_1 : \quad t_1 &= -\frac{b(a+b)}{2\alpha_1\alpha_2}, \quad s_1 = \frac{a(a-3b)}{2(\alpha_2+2\alpha_1)(2\alpha_2+\alpha_1)}, \\ h_1 &= \alpha_1\alpha_2[\alpha_1\alpha_2(a^2 - 7b^2 - 10ab) - 4b(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(a+b)], \\ k_1 &= -ab[2ab(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \alpha_1\alpha_2a^2 - b^2(\alpha_2+2\alpha_1)(2\alpha_2+\alpha_1)], \end{aligned}$$

Рис. 1. Вещественная часть дискриминантного множества $\tilde{\Sigma}$ и его увеличенный фрагмент для значений параметров $a = 0.66$, $b = 0.86$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.77$.

$$\begin{aligned}
 P_2 : \quad t_2 &= \frac{b(a+b)}{2\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad s_2 = \frac{a(a-3b)}{2(\alpha_2+2\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)}, \\
 h_2 &= \alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)[\alpha_2(a^2+b^2)(\alpha_1+\alpha_2) + 2ab(\alpha_2+2\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2) + 4b^2\alpha_1^2], \\
 k_2 &= ab[b^2(\alpha_2+2\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2) + a(a-4b)\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2) - 2ab\alpha_1^2], \\
 P_3 : \quad t_3 &= -\frac{b(a-b)}{2\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad s_3 = -\frac{a(a+3b)}{2(\alpha_1-\alpha_2)(2\alpha_2+\alpha_1)}, \\
 h_3 &= \alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)[\alpha_1(a^2+b^2)(\alpha_1+\alpha_2) + 2ab(\alpha_1-\alpha_2)(2\alpha_2+\alpha_1) + 4b^2\alpha_2^2], \\
 k_3 &= -ab[\alpha_1(a^2-b^2+4ab)(\alpha_1+\alpha_2) + 2b(a+b)\alpha_2^2], \\
 P_4 : \quad t_4 &= -\frac{b(a-b)}{2\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad s_4 = \frac{a(a+3b)}{2(\alpha_2+2\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)}, \\
 h_4 &= \alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)[\alpha_2(a^2+b^2)(\alpha_1+\alpha_2) - 2ab(\alpha_2+2\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2) + 4b^2\alpha_1^2], \\
 k_4 &= -ab[\alpha_2(a^2-b^2+4ab)(\alpha_1+\alpha_2) + 2b(a+b)\alpha_1^2], \\
 P_5 : \quad t_5 &= \frac{b(a-b)}{2\alpha_1\alpha_2}, \quad s_5 = \frac{a(a+3b)}{2(\alpha_2+2\alpha_1)(2\alpha_2+\alpha_1)}, \\
 h_5 &= \alpha_1\alpha_2[\alpha_1\alpha_2(a^2-7b^2+10ab) + 4b(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(a-b)], \\
 k_5 &= -ab[2ab(\alpha_1^2+\alpha_2^2) - \alpha_1\alpha_2a^2 + b^2(2\alpha_2+\alpha_1)(\alpha_2+2\alpha_1)], \\
 P_6 : \quad t_6 &= \frac{b(a+b)}{2\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad s_6 = -\frac{a(a-3b)}{2(\alpha_1-\alpha_2)(2\alpha_2+\alpha_1)}, \\
 h_6 &= \alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)[\alpha_1(a^2+b^2)(\alpha_1+\alpha_2) - 2ab(\alpha_1-\alpha_2)(2\alpha_2+\alpha_1) + 4b^2\alpha_2^2], \\
 k_6 &= ab[\alpha_1(a^2-b^2-4ab)(\alpha_1+\alpha_2) - 2b(a-b)\alpha_2^2],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_7: \quad t_7 &= -\frac{(a^2 - b^2)}{4\alpha_1\alpha_2}, \quad s_7 = -\frac{(a^2 - 9b^2)}{4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)}, \\
h_7 &= -2\alpha_1\alpha_2[(a^2 - b^2)\alpha_3^2 - 2b^2\alpha_1\alpha_2], \\
k_7 &= \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2(a^4 + 3b^4 - 12a^2b^2) + \frac{1}{4}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(a^4 - 3b^4 - 14a^2b^2), \\
P_8: \quad t_8 &= \frac{(a^2 - b^2)}{4\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad s_8 = -\frac{(a^2 - 9b^2)}{4(\alpha_2 + 2\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)}, \\
h_8 &= 2(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_2[(a^2 - b^2)\alpha_1^2 + 2b^2\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)], \\
k_8 &= \frac{1}{4}\alpha_1^2(a^4 - 3b^4 - 14a^2b^2) - b^2\alpha_2(a^2 + 3b^2)(\alpha_1 + \alpha_2), \\
P_9: \quad t_9 &= \frac{(a^2 - b^2)}{4\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad s_9 = \frac{(a^2 - 9b^2)}{4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)}, \\
h_9 &= 2\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)[(a^2 - b^2)\alpha_2^2 + 2b^2\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)], \\
k_9 &= \frac{1}{4}\alpha_2^2(a^4 - 3b^4 - 14a^2b^2) - \alpha_1b^2(a^2 + 3b^2)(\alpha_1 + \alpha_2).
\end{aligned}$$

Для точек возврата Q_1 , Q_2 и точки касания Q_0 ограничимся лишь приведением значений параметров t и s :

$$\begin{aligned}
Q_1: \quad s_{\text{cusp}} &= \sqrt[3]{\frac{a^2(a^2 - 9b^2)^2}{16(\alpha_1 - \alpha_2)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2(2\alpha_1 + \alpha_2)^2}}, \\
Q_2: \quad t_{\text{cusp}} &= \sqrt[3]{\frac{b^2(a^2 - b^2)^2}{16\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2}}, \\
Q_0: \quad t_0 = s_0 &= \frac{(a^2 + 3b^2)}{4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)}.
\end{aligned}$$

5. Аналитическая классификация особенностей ранга 0 отображения момента

Здесь мы покажем, что узловым точкам пересечения вещественной части дискриминантных кривых P_1 – P_6 отвечают невырожденные особенности ранга 0 отображения момента. Напомним некоторые определения. Фиксируем значения казимиров a и b и рассмотрим интегральное отображение

$$\mathcal{F}: \mathcal{P}_{a,b}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

полагая $(h, k) = \mathcal{F}(x) = (H(x), K(x))$. Отображение $\mathcal{F}$ принято также называть *отображением момента*. Обозначим через $\mathcal{C}$ совокупность всех критических точек отображения момента, то есть множество точек, в которых $\text{rank } d\mathcal{F}(x) < 2$. Множество $\mathcal{C}$ можно стратифицировать рангом отображения момента, представив его в виде объединения $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0 \cup \mathcal{C}^1$. Здесь $\mathcal{C}^r = \{x: \text{rank } d\mathcal{F}(x) = r\}$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P}_{a,b}^4)$ называется *бифуркационной диаграммой*.

Множество C^0 исчерпывается неподвижными точками системы (2.1):

$$\begin{aligned}
 P_1: \quad & \begin{cases} c_{11} = (M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = a, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = b), \\ c_{21} = (M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = -a, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = -b), \end{cases} \\
 P_2: \quad & \begin{cases} c_{12} = (M_1 = a, M_2 = 0, M_3 = 0, S_1 = b, S_2 = 0, S_3 = 0), \\ c_{22} = (M_1 = -a, M_2 = 0, M_3 = 0, S_1 = -b, S_2 = 0, S_3 = 0), \end{cases} \\
 P_3: \quad & \begin{cases} c_{13} = (M_1 = 0, M_2 = a, M_3 = 0, S_1 = 0, S_2 = -b, S_3 = 0), \\ c_{23} = (M_1 = 0, M_2 = -a, M_3 = 0, S_1 = 0, S_2 = b, S_3 = 0), \end{cases} \\
 P_4: \quad & \begin{cases} c_{14} = (M_1 = a, M_2 = 0, M_3 = 0, S_1 = -b, S_2 = 0, S_3 = 0), \\ c_{24} = (M_1 = -a, M_2 = 0, M_3 = 0, S_1 = b, S_2 = 0, S_3 = 0), \end{cases} \\
 P_5: \quad & \begin{cases} c_{15} = (M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = a, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = -b), \\ c_{25} = (M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = -a, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = b), \end{cases} \\
 P_6: \quad & \begin{cases} c_{16} = (M_1 = 0, M_2 = a, M_3 = 0, S_1 = 0, S_2 = b, S_3 = 0), \\ c_{26} = (M_1 = 0, M_2 = -a, M_3 = 0, S_1 = 0, S_2 = -b, S_3 = 0). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Отметим, что остальным точкам P_7 – P_9 не соответствует никакая особенность ранга 0. Узловые точки P_1 – P_6 пересечения дискриминантных кривых образуют нульмерный остов бифуркационной диаграммы Σ , поскольку им отвечают особенности ранга 0 отображения момента. Выясним тип точек c_{ij} .

Хорошо известно [26], что в неподвижной точке матрица линеаризации канонических уравнений с гамильтонианом H задает оператор $A_H: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$, у которого характеристический многочлен содержит только четные степени. Соответствующие собственные числа полностью определяют характер устойчивости, если все они различны. В силу вырожденности скобки (2.2) или, что то же самое, в силу наличия интегралов (2.3), два собственных числа оператора A_H нулевые. Обозначим через $\varrho_H(\mu)$ характеристический многочлен A_H , сокращенный на μ^2 . Очевидно, многочлен $\varrho_H(\mu)$ есть биквадрат. Заменяя в уравнениях (2.4) гамильтониан H на первый интеграл K , той же процедурой получим оператор A_K и биквадратный трехчлен $\varrho_K(\mu)$.

Полагая $\lambda = \mu^2$, выпишем явно квадраты корней $\varrho_H(\mu)$ в точках P_k , $k = 1, \dots, 6$:

$$\begin{aligned}
 P_1: \quad & \begin{cases} \lambda_1 = -4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)[(a+b)\alpha_1 + 2b\alpha_2][2b\alpha_1 + (a+b)\alpha_2]\alpha_1^2\alpha_2^2, \\ \lambda_2 = -\frac{4}{9}\alpha_1\alpha_2[(a+b)\alpha_1 + 2b\alpha_2][2b\alpha_1 + (a+b)\alpha_2](\alpha_2 + 2\alpha_1)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2, \end{cases} \\
 P_2: \quad & \begin{cases} \lambda_1 = 4(\alpha_2 + 2\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)[(a+b)\alpha_1 + (a-b)\alpha_2][-2b\alpha_1 + (a-b)\alpha_2](\alpha_1 + \alpha_2)^2\alpha_2^2, \\ \lambda_2 = -\frac{4}{9}\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)[(a+b)\alpha_1 + (a-b)\alpha_2][-2b\alpha_1 + (a-b)\alpha_2](\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 + 2\alpha_1)^2, \end{cases} \\
 P_3: \quad & \begin{cases} \lambda_1 = -4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)[(a+b)\alpha_1 + (a-b)\alpha_2][(a+b)\alpha_1 + 2b\alpha_2](\alpha_1 + \alpha_2)^2\alpha_1^2, \\ \lambda_2 = -\frac{4}{9}\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)[(a+b)\alpha_1 + (a-b)\alpha_2][(a+b)\alpha_1 + 2b\alpha_2](\alpha_1 - \alpha_2)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2, \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_4: & \begin{cases} \lambda_1 = 4(\alpha_2 + 2\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)[(a - b)\alpha_1 + (a + b)\alpha_2][2b\alpha_1 + (a + b)\alpha_2](\alpha_1 + \alpha_2)^2\alpha_2^2, \\ \lambda_2 = -\frac{4}{9}\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)[(a - b)\alpha_1 + (a + b)\alpha_2][2b\alpha_1 + (a + b)\alpha_2](\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 + 2\alpha_1)^2, \end{cases} \\
P_5: & \begin{cases} \lambda_1 = -4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)[-2b\alpha_1 + (a - b)\alpha_2][(a - b)\alpha_1 - 2b\alpha_2]\alpha_1^2\alpha_2^2, \\ \lambda_2 = -\frac{4}{9}\alpha_1\alpha_2[-2b\alpha_1 + (a - b)\alpha_2][(a - b)\alpha_1 - 2b\alpha_2](\alpha_2 + 2\alpha_1)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2, \end{cases} \\
P_6: & \begin{cases} \lambda_1 = -4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)[(a - b)\alpha_1 - 2b\alpha_2][(a - b)\alpha_1 + (a + b)\alpha_2](\alpha_1 + \alpha_2)^2\alpha_1^2, \\ \lambda_2 = -\frac{4}{9}\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)[(a - b)\alpha_1 - 2b\alpha_2][(a - b)\alpha_1 + (a + b)\alpha_2](\alpha_1 - \alpha_2)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Напомним, что в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы, имеющей два функционально независимых первых интеграла H, K , тип неподвижной точки определяется для так называемых невырожденных точек. Критерий невырожденности состоит в том, что операторы A_H, A_K линейно независимы и найдется такая их линейная комбинация, у которой все собственные числа различны [27, 28]. Пусть A такая комбинация. Оператор A называется в этом случае регулярным элементом (алгебры симплектических операторов, порожденной парой A_H, A_K). Говорят, что неподвижная точка имеет тип «центр – центр», если все собственные числа A чисто мнимые, тип «седло – седло», если все они вещественные, и тип «центр – седло», если одна пара собственных чисел чисто мнимая, а вторая – вещественна. Теоретически имеется еще один случай, когда собственные числа A имеют вид $(\pm a \pm bi)$ с $ab \neq 0$. Такие неподвижные точки называются фокусными. При этом характеристический многочлен регулярного элемента неприводим над $\mathbb{R}$. Однако уже из полученных выражений для $\rho_H(\mu)$ следует, что в рассматриваемой задаче фокусных точек нет.

Для выбранных значений параметров $a = 0.66, b = 0.86, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.77$ тип точек c_{ij} , которые являются особенностями ранга 0, определяется из следующей таблицы 1.

Таблица 1

$\mathcal{P}_{a,b}^4$	Образ в $\mathbb{R}^2(h, k)$	Тип
c_{11} c_{21}	P_1	центр – центр
c_{12} c_{22}	P_2	центр – седло
c_{13} c_{23}	P_3	центр – центр
c_{14} c_{24}	P_4	центр – седло
c_{15} c_{25}	P_5	центр – центр
c_{16} c_{26}	P_6	седло – седло

С учетом таблицы 1 и выбранных значений параметров $a = 0.66, b = 0.86, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.77$ предполагаемая бифуркационная диаграмма Σ показана на рисунке 2.

Рис. 2. Предполагаемая бифуркационная диаграмма Σ и ее увеличенный фрагмент для значений параметров $a = 0.66$, $b = 0.86$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.77$.

6. Критические точки ранга 1 отображения момента

В этом разделе мы опишем явно некоторые критические точки ранга 1, которые лежат в прообразе дискриминантных кривых, соединяющих точки нульмерного остова P_k , $k = 1, \dots, 6$. Мы не ставим целью найти *все* критические точки ранга 1, а существенно предполагаем, что вещественная часть дискриминантного множества содержит бифуркационную диаграмму. С одной стороны, это недостаток, поскольку о существовании общих теорем о включении бифуркационной диаграммы в вещественную часть дискриминантного множества на сегодняшний день нам не известно. С другой стороны, опыт исследования конкретных механических систем подсказывает, что это так.

Критические точки ранга 1 отображения момента $\mathcal{F}$ удобно определять из условия

$$\text{rank}(H \times K \times F_1 \times F_2) < 4, \quad (6.1)$$

проверяя обращение в нуль миноров четвертого порядка. При этом можно использовать тот факт, что интегральные многообразия $J_{h,k} = \{x \in \mathcal{P}_{a,b}^4 : H(x) = h, K(x) = k\}$ инвариантны относительно преобразований фазовых координат

$$\tau_1 : (M_1, M_2, M_3, S_1, S_2, S_3) \rightarrow (-M_1, M_2, M_3, -S_1, S_2, S_3),$$

$$\tau_2 : (M_1, M_2, M_3, S_1, S_2, S_3) \rightarrow (M_1, -M_2, M_3, S_1, -S_2, S_3),$$

$$\tau_3 : (M_1, M_2, M_3, S_1, S_2, S_3) \rightarrow (M_1, M_2, -M_3, S_1, S_2, -S_3).$$

Рассмотрим множество $\mathcal{M}_1$ неподвижных точек преобразования τ_1 :

$$\mathcal{M}_1 = \{(M, S) \in \mathcal{P}_{a,b}^4 : M_1 = S_1 = 0\}.$$

Множеству $\mathcal{M}_1$ заведомо принадлежат неподвижные точки системы (2.1): c_{11} , c_{21} , c_{13} , c_{23} , c_{15} , c_{25} , c_{16} , c_{26} . Исключая их, найдем пересечение $\mathcal{M}_1$ с оставшейся частью множества критических точек $\mathcal{C}$.

Полагая в (6.1) $M_1 = S_1 = 0$, приходим к одному уравнению, которое представляет собой произведение двух полиномиальных выражений:

$$\begin{aligned} & [(\alpha_1 + \alpha_2)S_3M_2 + \alpha_2S_2M_3 - (\alpha_1 + 2\alpha_2)S_2S_3] \times \\ & \times \left[\alpha_1^2(\alpha_1M_3 + 3\alpha_2S_3)M_2^3 - 3\alpha_1[\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)M_3 + 2\alpha_2(2\alpha_2 + \alpha_1)S_3]S_2M_2^2 + \right. \\ & + \{ \alpha_1^2(\alpha_1M_3 + 3\alpha_2S_3)M_3^2 + 3\alpha_1^2(2\alpha_2 + \alpha_1)(S_2^2 - S_3^2)M_3 + (2\alpha_2 + \alpha_1)^2 \times \\ & \times [3S_2^2\alpha_2 - (2\alpha_1 + \alpha_2)S_3^2]S_3 \} M_2 - [3\alpha_1^3(M_3 + S_3)^2 + 3\alpha_2\alpha_1^2M_3^2 + 6\alpha_1\alpha_2(2\alpha_2 + 3\alpha_1)S_3M_3 + \\ & \left. + 3\alpha_2(5\alpha_1^2 + 8\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_2^2)S_3^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)(2\alpha_2 + \alpha_1)^2S_2^2]M_3S_2 \right] = 0. \end{aligned}$$

В первом случае критические точки ранга 1, которые принадлежат множеству $\mathcal{M}_1$, имеют следующую параметризацию:

$$\mathcal{M}_{11}: \begin{cases} M_1 = S_1 = 0, \\ S_2^2 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2[a^2b^2 - (b^2 + 2\alpha_1\alpha_2t)^2]}{\alpha_1(2\alpha_2 + \alpha_1)[a^2 - b^2 - 4\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)t]}, \\ M_2^2 = \frac{[a^2 - b^2 + 2\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)t]^2[a^2b^2 - (b^2 + 2\alpha_1\alpha_2t)^2]^2}{4t^2\alpha_1^3(\alpha_1 + 2\alpha_2)[a^2 - b^2 - 4\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)t]}. \end{cases} \quad (6.2)$$

Во втором случае критические точки ранга 1, которые также принадлежат множеству $\mathcal{M}_1$, определяются системой уравнений

$$\mathcal{M}_{21}: \begin{cases} M_1 = S_1 = 0, \\ M_3^2 = \frac{[2(2\alpha_1 + \alpha_2)(2\alpha_2 + \alpha_1)^3s^2 + 2a^2(2\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 - 4\alpha_2)s + a^2(a^2 - 9b^2)]^2 \times A_1}{108\alpha_1^3(2\alpha_2 + \alpha_1)[a^2 - 9b^2 + 4s(2\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2)][a^2 - (2\alpha_2 + \alpha_1)^2s]^2s^2}, \\ S_3^2 = \frac{[\alpha_1a^2 + 3b^2(2\alpha_2 + \alpha_1) - 2\alpha_1(2\alpha_2 + \alpha_1)(2\alpha_1 + \alpha_2)s]^2A_1}{12\alpha_1(2\alpha_2 + \alpha_1)[a^2 - (2\alpha_2 + \alpha_1)^2s]^2[a^2 - 9b^2 + 4(2\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2)s]}, \\ \text{где } A_1 = [a^2 + 2(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)s]^2 - 9a^2b^2. \end{cases} \quad (6.3)$$

Теперь рассмотрим множество $\mathcal{M}_2$ неподвижных точек преобразования τ_2 ,

$$\mathcal{M}_2 = \{(\mathbf{M}, \mathbf{S}) \in \mathcal{P}_{a,b}^4: M_2 = S_2 = 0\},$$

к которому принадлежат неподвижные точки системы (2.1): $c_{11}, c_{21}, c_{12}, c_{22}, c_{14}, c_{24}, c_{15}, c_{25}$. Как и в предыдущем случае, исключая их, найдем пересечение $\mathcal{M}_2$ с оставшейся частью множества критических точек $\mathcal{C}$.

Полагая в (6.1) $M_2 = S_2 = 0$, приходим к одному уравнению, которое представляет собой по-прежнему произведение двух полиномиальных выражений:

$$\begin{aligned} & [(\alpha_1 + \alpha_2)S_3M_1 + \alpha_1S_1M_3 - (2\alpha_1 + \alpha_2)S_1S_3] \times \\ & \times \left[\alpha_2^2(\alpha_2M_3 + 3\alpha_1S_3)M_1^3 - 3\alpha_2[\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)M_3 + 2\alpha_1(2\alpha_1 + \alpha_2)S_3]S_1M_1^2 + \right. \\ & + \{ \alpha_2^2(\alpha_2M_3 + 3\alpha_1S_3)M_3^2 + 3\alpha_2^2(2\alpha_1 + \alpha_2)(S_1^2 - S_3^2)M_3 + (2\alpha_1 + \alpha_2)^2 \times \\ & \times [3S_1^2\alpha_1 - (2\alpha_2 + \alpha_1)S_3^2]S_3 \} M_1 + [3\alpha_2^3(M_3 + S_3)^2 + 3\alpha_2^2\alpha_1M_3^2 + \\ & + 6\alpha_1\alpha_2(3\alpha_2 + 2\alpha_1)M_3S_3 + 3\alpha_1(5\alpha_2^2 + 8\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1^2)S_3^2 - \\ & \left. - (\alpha_1 - \alpha_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)^2S_1^2]S_1M_3 \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

В первом случае критические точки ранга 1, которые принадлежат множеству $\mathcal{M}_2$, имеют следующую параметризацию:

$$\mathcal{M}_{12}: \begin{cases} M_2 = S_2 = 0, \\ S_1^2 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 [a^2 b^2 - (b^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 t)^2]}{\alpha_2 (\alpha_2 + 2\alpha_1) [a^2 - b^2 - 4\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2) t]}, \\ M_1^2 = \frac{[a^2 b^2 - (b^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 t)^2] [a^2 - b^2 + 2\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) t]^2}{4t^2 \alpha_2^3 (\alpha_2 + 2\alpha_1) [a^2 - b^2 - 4\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2) t]}. \end{cases}$$

Во втором случае (6.4):

$$\mathcal{M}_{22}: \begin{cases} M_2 = S_2 = 0, \\ M_3^2 = \frac{[2(2\alpha_2 + \alpha_1)(2\alpha_1 + \alpha_2)^3 s^2 - 2a^2(2\alpha_2 + \alpha_1)(4\alpha_1 - \alpha_2)s + a^2(a^2 - 9b^2)]^2 A_2}{108\alpha_2^3(2\alpha_1 + \alpha_2)[a^2 - 9b^2 - 4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)s][a^2 - (2\alpha_1 + \alpha_2)^2 s]^2 s^2}, \\ S_3^2 = \frac{[\alpha_2 a^2 + 3b^2(2\alpha_1 + \alpha_2) - 2\alpha_2(2\alpha_2 + \alpha_1)(2\alpha_1 + \alpha_2)s]^2 A_2}{12\alpha_2(2\alpha_1 + \alpha_2)[a^2 - (2\alpha_1 + \alpha_2)^2 s]^2 [a^2 - 9b^2 - 4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)s]}, \\ \text{где } A_2 = [a^2 - 2(2\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2)s]^2 - 9a^2 b^2. \end{cases}$$

Наконец, рассмотрим множество $\mathcal{M}_3$ неподвижных точек преобразования τ_3 ,

$$\mathcal{M}_3 = \{(\mathbf{M}, \mathbf{S}) \in \mathcal{P}_{a,b}^4: M_3 = S_3 = 0\},$$

которому принадлежат неподвижные точки системы (2.1): $c_{12}, c_{22}, c_{13}, c_{23}, c_{14}, c_{24}, c_{16}, c_{26}$. Исключая их, найдем пересечение $\mathcal{M}_3$ с оставшейся частью множества критических точек $\mathcal{C}$. Подставляя в (6.1) $M_3 = S_3 = 0$, приходим к одному уравнению, которое представляет собой, как в предыдущих случаях, произведение двух полиномиальных выражений:

$$\begin{aligned} & [(\alpha_1 - \alpha_2)S_1 S_2 + \alpha_2 M_1 S_2 - \alpha_1 S_1 M_2] \times \\ & \times \left\{ (\alpha_1 + \alpha_2)^2 [(\alpha_1 + \alpha_2)M_2 - 3\alpha_1 S_2] M_1^3 - 3(\alpha_1 + \alpha_2) [\alpha_2 M_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \right. \\ & + 2\alpha_1 S_2 (\alpha_1 - \alpha_2)] S_1 M_1^2 + [(\alpha_1 + \alpha_2)^2 [(\alpha_1 + \alpha_2)M_2 - 3\alpha_1 S_2] M_2^2 - \\ & - 3(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2)^2 (S_1^2 - S_2^2) M_2 - S_2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (3S_1^2 \alpha_1 + S_2^2 \alpha_1 + 2\alpha_2 S_2^2)] M_1 - \\ & - 3\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2 S_1 M_2^3 + 6\alpha_2 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) S_1 S_2 M_2^2 - \\ & \left. - M_2 S_1 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (2S_1^2 \alpha_1 + \alpha_2 S_1^2 + 3\alpha_2 S_2^2) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

В первом случае критические точки ранга 1, которые принадлежат множеству $\mathcal{M}_3$, удовлетворяют системе уравнений:

$$\mathcal{M}_{13}: \begin{cases} M_3 = S_3 = 0, \\ S_2^2 = \frac{\alpha_1^2 \{a^2 b^2 - [b^2 - 2\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) t]^2\}}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (a^2 - b^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 t)}, \\ M_2^2 = \frac{\{a^2 b^2 - [b^2 - 2\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) t]^2\} [a^2 - b^2 + 2\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2) t]^2}{4(\alpha_1 + \alpha_2)^3 (\alpha_1 - \alpha_2) (a^2 - b^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 t) t^2}. \end{cases}$$

Во втором случае (6.5):

$$\mathcal{M}_{23}: \begin{cases} M_3 = S_3 = 0, \\ M_1^2 = \frac{[2(\alpha_2 + 2\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)^3 s^2 + 2a^2(\alpha_1 + 5\alpha_2)(\alpha_2 + 2\alpha_1)s + a^2(a^2 - 9b^2)]^2 A_3}{108(\alpha_1 + \alpha_2)^3(\alpha_1 - \alpha_2)[a^2 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 s]^2 [a^2 - 9b^2 + 4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)s] s^2}, \\ S_1^2 = \frac{[(\alpha_1 + \alpha_2)a^2 + 3b^2(\alpha_1 - \alpha_2) - 2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(\alpha_2 + 2\alpha_1)s]^2 A_3}{12(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)[a^2 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 s]^2 [a^2 - 9b^2 + 4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)s]}, \\ \text{где } A_3 = [a^2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(2\alpha_2 + \alpha_1)s]^2 - 9a^2b^2. \end{cases}$$

Здесь параметры t и s одновременно являются параметрами дискриминантных кривых γ_1 и γ_2 соответственно. Поскольку левые части выражений для семейств $\mathcal{M}_{ij}$ содержат квадраты фазовых переменных, то правые части должны быть неотрицательными. В таблице 2 приведены соответствующие области изменения параметров t и s для выделения вещественных решений из семейств $\mathcal{M}_{ij}$. Здесь использованы следующие значения параметров: $a = 0.66$, $b = 0.86$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.77$.

Таблица 2

Кривая	Семейство	Область существования	Сегмент кривой γ_k
γ_1	$\mathcal{M}_{11}$	$[t_1; t_5] \cup [t_3; t_6]$	$[P_1; P_5] \cup [P_3; P_6]$
γ_1	$\mathcal{M}_{12}$	$[t_1; t_5] \cup [t_4; t_2]$	$[P_1; P_5] \cup [P_4; P_2]$
γ_1	$\mathcal{M}_{13}$	$[t_3; t_4] \cup [t_6; t_2]$	$[P_3; P_4] \cup [P_6; P_2]$
γ_2	$\mathcal{M}_{21}$	$[s_3; s_1] \cup [s_5; s_6]$	$[P_3; P_1] \cup [P_5; P_6]$
γ_2	$\mathcal{M}_{22}$	$[s_2; s_1] \cup [s_5; s_4]$	$[P_2; P_1] \cup [P_5; P_4]$
γ_2	$\mathcal{M}_{23}$	$[s_3; s_2] \cup [s_6; s_4]$	$[P_3; P_2] \cup [P_6; P_4]$

Таким образом, приведенные выражения и области изменения параметров позволяют выделить сегменты дискриминантных кривых, которые вместе с узловыми точками P_1 – P_6 и определяют бифуркационную диаграмму Σ отображения момента $\mathcal{F}$. Напомним, что наш алгоритм работает при условии, что вещественная часть дискриминантного множества содержит бифуркационную диаграмму.

В качестве приложения полученных выражений вычислим тип критических точек ранга 1. При этом достаточно определить тип (эллиптический/гиперболический) в какой-нибудь одной из точек $(h, k) \in \Sigma$ гладкой ветви бифуркационной диаграммы [29]. Мы это сделаем для критических точек ранга 1 из семейств $\mathcal{M}_{11}$ и $\mathcal{M}_{21}$, которые принадлежат множеству $\mathcal{M}_1$ и имеют явную параметризацию в виде формул (6.2) и (6.3).

Тип критической точки x_0 ранга 1 в интегрируемой системе с двумя степенями свободы вычисляется следующим образом. Необходимо указать первый интеграл F , такой, что $dF(x_0) = 0$ и $dF \neq 0$ в окрестности этой точки. Тогда, в частности, точка x_0 оказывается неподвижной для гамильтонова поля $\text{sgrad } F$ и можно вычислить линеаризацию этого поля в точке x_0 — симплектический оператор A_F в четырехмерном касательном пространстве к фазовому пространству в точке x_0 . Этот оператор будет иметь два нулевых собственных числа, оставшийся сомножитель характеристического многочлена имеет вид $\mu^2 - C_F$. При $C_F < 0$ получим точку типа «центр» (соответствующее периодическое решение имеет

эллиптический тип, является устойчивым периодическим решением в фазовом пространстве, пределом концентрического семейства двумерных регулярных торов), а при $C_F > 0$ получим точку типа «седло» (соответствующее периодическое решение имеет гиперболический тип, существуют движения, асимптотические к этому решению, лежащие на двумерных сепаратрисных поверхностях).

В нашей задаче ситуация осложнена тем, что фазовое пространство задано в $\mathbb{R}^6$ двумя неявными уравнениями (2.5) и вычислять ограничения операторов на касательные пространства затруднительно. Однако функции в левых частях уравнений (2.5) служат функциями Казимира для естественного продолжения на $\mathbb{R}^6$ скобки Пуассона симплектической структуры пространства $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, поэтому при вычислении симплектических операторов вида A_F они лишь добавляют два нулевых корня в характеристический многочлен, имеющий в целом шестую степень. Таким образом, мы заранее знаем, что при условии $\text{sgrad } F = 0$ искомым коэффициент C_F есть коэффициент при μ^4 в характеристическом многочлене $Z_F(\mu)$ оператора A_F в $\mathbb{R}^6$:

$$Z_F(\mu) = \mu^4(\mu^2 - C_F).$$

Сам же оператор A_F вычисляется и при наличии вырожденных скобок Пуассона (для рассматриваемого здесь пространства $\mathbb{R}^6$ они определены явно формулами (2.2)). Отметим, что при вычислении характеристического многочлена через определитель соответствующей (6×6) -матрицы трудности для некоторых функций оказываются слишком высоки даже при использовании мощных современных систем аналитических вычислений. Однако, заранее зная в данном случае структуру искомого многочлена, можем найти

$$C_F = \frac{1}{2} \text{trace}(A_F^2).$$

Предложение 2. Тип критических точек ранга 1, заданных системами (6.2) и (6.3), определяется знаками квадратов характеристических показателей

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \frac{[16(\alpha_1 - \alpha_2)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2(2\alpha_1 + \alpha_2)^2 s^3 - a^2(a^2 - 9b^2)^2][a^2 + 3b^2 - 4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)s]^2}{324s^4}, \\ \mu^2 &= \frac{[16\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 t^3 - b^2(a^2 - b^2)^2][a^2 + 3b^2 - 4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)t]^2}{36t^4}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где t и s — значения параметров в соответствующей точке (6.2) и (6.3) кривых γ_1 и γ_2 . Критические точки имеют тип «центр» при $\mu^2 < 0$ и тип «седло» при $\mu^2 > 0$. При $\mu = 0$ критические точки вырождены. На кривых γ_1 и γ_2 множество вырожденных критических точек отвечает точкам возврата и точке касания.

Доказательство. Рассмотрим функцию $L = H + \sigma K$. Вычисляя ее косой градиент в точках (6.2) и (6.3) и приравнявая его к нулю, найдем

$$\sigma = -\frac{1}{t} \text{ в точках } \mathcal{M}_{11} \quad \text{и} \quad \sigma = -\frac{1}{s} \text{ в точках } \mathcal{M}_{21}. \quad (6.7)$$

Полученные поля $\text{sgrad } L$ обращаются в нуль лишь в самих рассматриваемых точках (6.2) и (6.3), но не в окрестности, а следовательно, основное требование к интегралу L выполнено. Вычислим $\frac{1}{2} \text{trace}(A_L^2)$, подставим значения (6.7), затем — (6.2) и (6.3) соответственно. Найденные выражения средствами компьютерной алгебры разлагаются на множители,

Таблица 3

Кривая	Сегмент на кривой	Тип
γ_1	$(P_1; P_5)$	эллиптический
γ_1	$(P_2; P_6) \cup (P_6; Q_0) \cup (Q_0; Q_2)$	гиперболический
γ_1	$(P_3; P_4) \cup (P_4; Q_2)$	эллиптический
γ_2	$(P_1; P_2) \cup (P_2; P_3)$	эллиптический
γ_2	$(P_5; Q_0) \cup (Q_0; Q_1)$	эллиптический
γ_2	$(P_4; P_6) \cup (P_6; Q_1)$	гиперболический

которые дают искомые значения (6.6). Характер критических точек определяется знаком величин (6.6). Тот факт, что при равенстве этой величины нулю критические точки вырождены (то есть нельзя указать другого интеграла с ненулевым характеристическим значением), вытекает из того, что коэффициент при H в функции L отличен от нуля (он просто равен единице), а равенство $dH = 0$ приводит к критическим точкам ранга 0. Связь множества $\mu^2 = 0$ с геометрическими свойствами кривых $\gamma_{1,2}$ проверяется непосредственно. ■

Для выбранных значений параметров $a = 0.66$, $b = 0.86$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.77$ тип критических точек ранга 1 определяется из таблицы 3.

7. Заключение

В работе приводится в явном виде спектральная кривая, коэффициентами которой являются первые интегралы рассматриваемого интегрируемого случая Адлера и ван Мёрбеке. Дискриминантное множество спектральной кривой представлено в виде объединения поверхностей кратных корней двух многочленов. С помощью критических точек ранга 0 и 1 отображения момента предлагается алгоритм выделения бифуркационной диаграммы отображения момента из вещественной части дискриминантного множества. Алгоритм работает при условии, что вещественная часть дискриминантного множества содержит бифуркационную диаграмму.

Благодарности

Авторы выражают благодарность А. В. Борисову и И. С. Мамаеву за плодотворные обсуждения и ценные советы, касающиеся как содержания работы, так и методологии исследования.

References

- [1] Adler M., van Moerbeke P. A. A new geodesic flow on $so(4)$, in *Probability, statistical mechanics and number theory: A volume dedicated to Mark Kac*, G.-C. Rota (Ed.), Adv. Math. Suppl. Stud., vol. 9, Orlando, Fla.: Acad. Press, 1986, pp. 81–96.
- [2] Mishchenko A. S., Fomenko A. T. Euler equations on finite-dimensional Lie groups, *Math. USSR-Izv.*, 1978, vol. 12, no. 2, pp. 371–389; see also: *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1978, vol. 42, no. 2, pp. 396–415.

- [3] Mishchenko A. S., Fomenko A. T. Integrability of Euler's equations on semisimple Lie algebras, *Tr. Semin. Vektorn. Tenzorn. Anal.*, 1979, vol. 19, pp. 3–94 (Russian).
- [4] Borisov A. V., Mamaev I. S., Sokolov V. V. A new integrable case on $so(4)$, *Dokl. Phys.*, 2001, vol. 46, no. 12, pp. 888–889; see also: *Dokl. Ross. Akad. Nauk*, 2001, vol. 381, no. 5, pp. 614–615.
- [5] Greenhill A. G. On the general motion of a liquid ellipsoid under the gravitation of its own parts, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1880, vol. 4, pp. 4–14.
- [6] Zhukovskii N. E. Motion of a rigid body containing a cavity filled with a homogeneous continuous liquid, in *Collected Works: Vol. 1*, Moscow: Gostekhizdat, 1949, pp. 31–152 (Russian).
- [7] Poincaré H. Sur la précession des corps déformables, *Bull. Astron.*, 1910, vol. 27, pp. 321–356.
- [8] Moiseyev N. N., Rumyantsev V. V. *Dynamic stability of bodies containing fluid*, New York: Springer, 1968.
- [9] Stekloff V. A. Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (3)*, 1909, vol. 1, pp. 145–256.
- [10] Fomenko A. T. *Symplectic geometry*, 2nd ed., Adv. Stud. Contemp. Math., vol. 5, Boca Raton, Fla.: CRC Press, 1995.
- [11] Adler M., van Moerbeke P., Vanhaecke P. *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, *Ergeb. Math. Grenzgeb. (3)*, vol. 47, Berlin: Springer, 2004.
- [12] Kozlov V. V. *Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics*, *Ergeb. Math. Grenzgeb. (3)*, vol. 31, Berlin: Springer, 1996.
- [13] Borisov A. V., Mamaev I. S. *Modern methods of the theory of integrable systems*, Moscow: R&C Dynamics, ICS, 2003 (Russian).
- [14] Borisov A. V., Mamaev I. S. *Dynamics of a rigid body: Hamiltonian methods, integrability, chaos*, 2nd ed., Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2005 (Russian).
- [15] Bogoyavlenskii O. I. *Overtaking solitons. Nonlinear integrable equations*, Moscow: Nauka, 1991 (Russian).
- [16] Audin M. *Spinning tops: A course on integrable systems*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 51, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
- [17] Brailov Yu. A. Geometry of translations of invariants on semisimple Lie algebras, *Sb. Math.*, 2003, vol. 194, nos. 11–12, pp. 1585–1598; see also: *Mat. Sb.*, 2003, vol. 194, no. 11, pp. 3–16.
- [18] Ryabov P. E. Algebraic curves and bifurcation diagrams of two integrable problems, *Mekh. Tverd. Tela*, 2007, no. 37, pp. 97–111 (Russian).
- [19] Bolsinov A. V., Oshemkov A. A. Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2009, vol. 14, nos. 4–5, pp. 431–454.
- [20] Konyaev A. Yu. The bifurcation diagram and discriminant of a spectral curve of integrable systems on Lie algebras, *Sb. Math.*, 2010, vol. 201, nos. 9–10, pp. 1273–1305; see also: *Mat. Sb.*, 2010, vol. 201, no. 9, pp. 27–60.
- [21] Bolsinov A., Izosimov A. Singularities of Bi-Hamiltonian systems, *Comm. Math. Phys.*, 2014, vol. 331, no. 2, pp. 507–543.
- [22] Ryabov P. E. New invariant relations for the generalized two-field gyrostat, *J. Geom. Phys.*, 2015, vol. 87, pp. 415–421.
- [23] Izosimov A. Singularities of integrable systems and algebraic curves, *Int. Math. Res. Notices*, 2016, vol. 2016, no. 17, 50 pp.
- [24] Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A. A new integrable case of the motion of the 4-dimensional rigid body, *Comm. Math. Phys.*, 1986, vol. 105, no. 3, pp. 461–472.
- [25] Bolsinov A. V., Borisov A. V. Compatible Poisson brackets on Lie algebras, *Math. Notes*, 2002, vol. 72, nos. 1–2, pp. 10–30; see also: *Mat. Zametki*, 2002, vol. 72, no. 1, pp. 11–34.
- [26] Malkin I. G. *Theory of stability of motion*, Ann Arbor, Mich.: Univ. of Michigan, 1958.

- [27] Lerman L.M., Umanskiĭ Ya.L. Structure of the Poisson action of $\mathbf{R}^2$ on a four-dimensional symplectic manifold: 1, *Selecta Math. Sov.*, 1987, vol. 6, no. 4, pp. 365–396.
- [28] Bolsinov A.V., Fomenko A.T. *Integrable Hamiltonian systems: Geometry, topology, classification*, Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall, 2004.
- [29] Bolsinov A.V., Borisov A.V., Mamaev I.S. Topology and stability of integrable systems, *Russian Math. Surveys*, 2010, vol. 65, no. 2, pp. 259–318; see also: *Uspekhi Mat. Nauk*, 2010, vol. 65, no. 2, pp. 71–132.

The discriminant set and bifurcation diagram of the integrable case of M. Adler and P. van Moerbeke

Pavel E. Ryabov¹, Ekaterina O. Biryucheva²

¹Financial University under the Government of Russian Federation

Leningradsky pr. 49, Moscow, 125993, Russia

Blagonravov Institute for Machine Science, Russian Academy of Sciences

ul. Bardina 4, Moscow, 119334, Russia

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Institutskiy per. 9, Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia

²Lomonosov Moscow State University

Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia

¹peryabov@fa.ru, ²biryucheva.katerina@gmail.com

The paper presents explicitly the spectral curve and the discriminant set of the integrable case of M. Adler and P. van Moerbeke. For critical points of rank 0 and 1 of the momentum map we explicitly calculate the characteristic values defining their type. An algorithm is proposed for finding the bifurcation diagram from the real part of the discriminant set with the help of critical points of rank 0 and 1. The algorithm works under the condition that the real part of the discriminant set contains the bifurcation diagram.

MSC 2010: 70E05, 70E17, 37J35, 34A05

Keywords: integrable Hamiltonian systems, spectral curve, discriminant set, bifurcation diagram

Received August 29, 2016, accepted September 20, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 633–650 (Russian)