УДК: 539.3; 531.37

MSC 2010: 70F40, 70F35, 70E18

Динамическая модель трения качения сферических тел по плоскости без проскальзывания

Ю. Л. Караваев, А. В. Клековкин, А. А. Килин

В данной работе представлена модель качения без проскальзывания сферических тел по плоскости с учетом вязкого трения качения. Проведен ряд экспериментов по исследованию влияния трения на динамику качения сферического тела. Проведена верификация предложенной динамической модели трения качения для сферических тел и оценка границ ее применимости. Сформулирована методика определения коэффициентов трения качения по экспериментальным данным.

Ключевые слова: трение качения, динамическая модель, сферическое тело, неголономная модель, экспериментальные исследования

Получено 17 ноября 2016 года

После доработки 10 марта 2017 года

Работа А. А. Килина (раздел 1) выполнена за счет гранта РФФИ 15-08-09261-а. Работа Ю. Л. Караваева, А. В. Клековкина (раздел 2) выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-01303).

Караваев Юрий Леонидович

karavaev_yury@istu.ru

Клековкин Антон Владимирович

kianvlad@mail.ru

Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова

426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

Килин Александр Александрович

aka@rcd.ru

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Введение

Алгоритмы управления существующими роботами в форме шара как системами, состоящими из многих тел, из-за сложности динамики строятся на кинематических моделях движения или без учета воздействия внешних сил сопротивления (в том числе трения). Однако, как показывают результаты последних работ по моделированию движения сферических роботов с учетом трения [6, 7], а также результаты экспериментальных исследований, представленных в работах [2–4], трение оказывает существенное влияние на динамику движения. При этом специфика движения сферических роботов подразумевает различные виды движения, такие как качение, верчение и скольжение, а также их комбинации. Существующие многопараметрические модели трения качения [8–10, 12, 13] строятся на модели трения, предложенной Контенсу [11], одновременно учитывающей скольжение и верчение, однако даже для случая однородного шара модели являются сложными и требуют существенных вычислительных затрат. Кроме того, такие модели не получили однозначного экспериментального подтверждения. Более полный обзор существующих моделей трения, в том числе описание проблемы их применимости для различных модельных задач, приведен в работе [1].

Главная цель данной работы — проведение экспериментальных исследований зависимостей сил трения, возникающих в процессе качения тела в форме сферы по плоскости, от параметров движения и создание динамической модели трения качения, с достаточной точностью описывающей динамику движения сферических тел и при этом обладающей низкой вычислительной сложностью; на основании проведенных исследований представлена методика определения коэффициентов трения для разрабатываемой динамической модели трения качения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним, что существующие технические справочные пособия разделяют коэффициенты трения скольжения и качения. Значения данных коэффициентов определяются по результатам длительных циклических испытаний и, как правило, отражают изменение энергии тела в процессе движения. Для каждой пары материалов соприкасающихся тел приводится ориентировочный диапазон значений коэффициентов, при этом в некоторых случаях диапазон настолько широк, что динамика движения при коэффициентах трения на границах данного диапазона отличается существенным образом. Современные экспериментальные методики уточнения коэффициентов трения, рассматривающих чистое качение тел, не отражают зависимости коэффициентов трения от скорости [15, 16].

На наш взгляд, для построения динамической модели трения качения сферического тела удобно модифицировать неголономную модель качения шара [17–19] введением трения качения. В данной работе мы рассматриваем линейную модель вязкого трения качения. Аналогичная модель использовалась в [14] и позволила качественно описать попятное движение катящегося диска.

1. Уравнения движения

Рассмотрим качение без проскальзывания динамически несимметричного неуравновешенного шара по горизонтальной плоскости (рис. 1). Обозначим через o геометрический центр шара, C — его центр масс, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ — вектор смещения центра масс шара относительно геометрического центра.

Для описания динамики системы выберем неподвижную систему координат $O\alpha\beta\gamma$ и подвижную $oe_1e_2e_3$, центр которой совпадает с геометрическим центром сферы, а оси

Рис. 1. Модель катящегося неоднородного шара.

направлены вдоль главных осей инерции. Связь неподвижной системы координат с подвижной задается матрицей перехода $\mathbf{Q} = (\alpha, \beta, \gamma)$, столбцы которой α, β, γ являются оортами неподвижной системы координат, записанными в проекциях на подвижные оси. Здесь и далее, если не оговорено иное, все векторы (выделенные жирным шрифтом) записаны в проекциях на оси подвижной системы координат $oe_1e_2e_3$.

Положение системы будем задавать координатами центра шара $\mathbf{r}_o = (x, y)$ в неподвижной системе координат и его ориентацией в пространстве при помощи матрицы $\mathbf{Q}$. Таким образом, конфигурационное пространство рассматриваемой системы представляет собой произведение $\mathcal{N} = \{\mathbf{r}_o, \mathbf{Q}\} = \mathbb{R}^2 \times SO(3)$.

Эволюция конфигурационных переменных определяется кинематическими соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= R(\beta, \omega), & \dot{y} &= -R(\alpha, \omega), \\ \dot{\alpha} &= \alpha \times \omega, & \dot{\beta} &= \beta \times \omega, & \dot{\gamma} &= \gamma \times \omega, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где ω — угловая скорость шара.

Будем полагать, что на систему наложена связь отсутствия проскальзывания в точке контакта шара с поверхностью. Эта связь описывается уравнением

$$\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r} = 0, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{r} = -R\gamma$ — радиус-вектор, соединяющий геометрический центр шара с точкой контакта, R — радиус шара, $\mathbf{v}$ — скорость центра шара.

Уравнения движения, описывающие качение шара без проскальзывания, можно представить в виде уравнений Даламбера – Лагранжа в квазискоростях с неопределенными множителями [17]

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}}\dot{\omega} + \omega \times (\tilde{\mathbf{I}}\omega + m\mathbf{c} \times \mathbf{v}) + m\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{v}} + m\mathbf{v} \times (\omega \times \mathbf{c}) + mg\mathbf{c} \times \gamma + R\gamma \times \lambda &= 0, \\ m\dot{\mathbf{v}} + m\dot{\omega} \times \mathbf{c} + m\omega \times (\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{c}) + mg\gamma &= \lambda, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + m(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} - m\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T$ — тензор инерции шара относительно точки контакта, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции шара, записанный в системе координат, связанной с шаром, m — масса шара, g — ускорение свободного падения, λ — вектор неопределенных множителей Лагранжа.

Неопределенные множители λ выражаются из совместного решения уравнений (1.3) и производной связей (1.2) по времени. После исключения неопределенных множителей и подстановки скорости $\mathbf{v}$ из уравнения (1.2) уравнения (1.3) принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}}\dot{\omega} + \omega \times \tilde{\mathbf{I}}\omega + mR\omega \times \mathbf{c} \times (\omega \times \gamma) + mR\mathbf{c} \times (\dot{\omega} \times \gamma) + mR\mathbf{c} \times (\omega \times (\gamma \times \omega)) + \\ + mR(\omega \times \gamma) \times (\omega \times \mathbf{c}) + mg\mathbf{c} \times \gamma + mR^2\gamma \times (\dot{\omega} \times \gamma) + mR\gamma \times (\dot{\omega} \times \mathbf{c}) + \\ + mR\gamma \times (\omega \times (\omega \times \mathbf{c})) = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Уравнения (1.4), (1.1) полностью описывают динамику качения шара без проскальзывания.

Для рассмотрения движения шара с учетом трения качения добавим в правую часть уравнения (1.4) момент трения качения M_f :

$$\begin{aligned} \tilde{I}\dot{\omega} + \omega \times \tilde{I}\omega + mR\omega \times c \times (\omega \times \gamma) + mRc \times (\dot{\omega} \times \gamma) + mRc \times (\omega \times (\gamma \times \omega)) + \\ + mR(\omega \times \gamma) \times (\omega \times c) + mgc \times \gamma + mR^2\gamma \times (\dot{\omega} \times \gamma) + mR\gamma \times (\dot{\omega} \times c) + \\ + mR\gamma \times (\omega \times (\omega \times c)) = M_f. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Независимо от вида момента трения качения M_f , полученные уравнения движения по-прежнему будут описывать качение без проскальзывания, то есть добавление произвольного момента трения качения M_f не приводит к нарушению связи (1.2).

Момент трения качения M_f может быть описан различными моделями. В экспериментальных работах [20, 21] по исследованию динамики качения диска рассматривается модель вязкого трения качения с квадратичной зависимостью от скорости движения. Такая модель подтверждается достаточно хорошим согласованием результатов численного моделирования для угла нутации и скорости прецессии с результатами экспериментальных исследований. Отметим, что на начальных стадиях движения диск движется с достаточно большой скоростью, что даже может приводить к его проскальзыванию [22]. В работе [14] линейная модель вязкого трения позволила качественно описать динамику движения диска, включая переход к ретроградному развороту.

Исходя из физических соображений момент трения качения удобно разложить на две компоненты, соответствующие моментам трения в различных направлениях: момент трения, препятствующий верчению сферического тела относительно вертикали γ , с коэффициентом трения μ_{spin} , и момент трения, вектор которого лежит в горизонтальной плоскости, препятствующий качению сферического тела, с коэффициентом трения μ_{roll} . В случае линейной модели момент трения качения можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_f = M_{spin} + M_{roll}, \\ M_{spin} = -\mu_{spin}(\omega, \gamma)\gamma, \quad M_{roll} = -\mu_{roll}(\omega - (\omega, \gamma)\gamma). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для обоснования выбора модели трения качения сферического тела проанализируем результаты экспериментальных исследований и восстановим динамику движения сферического тела для частных случаев чистого качения. Под чистым качением мы далее будем понимать качение без вращения тела вокруг вертикали. Такое качение часто называют моделью «резинового тела». Исследования различных задач в рамках данной модели можно найти в работах [18, 19].

2. Экспериментальные исследования динамики сферического тела

2.1. Описание экспериментальной установки

Для проведения экспериментальных исследований трения качения разработан специальный натурный образец сферического тела, представляющий собой полую прозрачную сферическую оболочку, внутри которой закреплялись грузы для обеспечения заданного смещения центра масс и световозвращающие маркеры системы захвата движения. Трехмерная модель и фотография экспериментального образца приведены на рисунке 2.

Рис. 2. а) 3D-модель экспериментального образца сферического тела. б) Фото прототипа.

Параметры экспериментального образца имеют следующие значения: радиус сферической оболочки $R = 0.035$ м, масса $m = 0.054$ кг, осевые моменты инерции, в системе координат, связанной с центром сферы, $I_x = I_y = 36535.4 \cdot 10^{-9}$ кг $\cdot$ м², $I_z = 22355.6 \cdot 10^{-9}$ кг $\cdot$ м², смещение центра масс $\mathbf{c} = (0, 0, 0.0109)$ м.

Система захвата движения фирмы Vison представляет собой набор камер с инфракрасной подсветкой, захватывающих изображения маркеров, по которым с помощью специального программного обеспечения восстанавливаются координаты объекта в пространстве и его ориентация. Частота съемки камер в экспериментах задавалась равной 200 Гц.

2.2. Экспериментальная оценка момента трения качения

Рассмотрим качение экспериментального образца по горизонтальной плоскости, покрытой листом бумаги. В экспериментах разработанный натурный образец отклонялся от положения равновесия, после чего начинал совершать колебательные движения. Типовая траектория движения геометрического центра шара приведена на рисунке 3а.

Рис. 3. а) Типовая траектория движения центра сферического тела. б) Типовая зависимость изменения компоненты γ_3 в первые 5 секунд движения.

Восстановив из эксперимента эволюцию фазовых переменных ω , γ при качении и подставив их в уравнения (1.5), найдем экспериментальную зависимость компонент момента трения качения $\widehat{M}_f$ от времени. Экспериментальные зависимости горизонтальной и вертикальной составляющей момента получим из следующих соотношений:

$$\widehat{M}_{spin} = (\widehat{M}_f, \hat{\gamma})\hat{\gamma}, \quad \widehat{M}_{roll} = \widehat{M}_f - (\widehat{M}_f, \hat{\gamma})\hat{\gamma}. \quad (2.1)$$

Здесь и далее переменные с символом циркумфлекс обозначают величины, полученные из экспериментальных данных.

На рисунке 4 показаны типовые зависимости модулей горизонтальной $|\widehat{M}_{roll}|$ и вертикальной $|\widehat{M}_{spin}|$ компонент момента трения качения от времени. Как видно из рисунка, в приведенном эксперименте вращение сферического тела относительно вертикали достаточно невелико, поэтому далее будем им пренебрегать и рассмотрим чистое качение.

Рассмотрим зависимость горизонтальной составляющей момента трения $\widehat{M}_{roll}$ от горизонтальной составляющей угловой скорости вращения $\widehat{\omega}_{roll} = \widehat{\omega} - (\widehat{\omega}, \hat{\gamma})\hat{\gamma}$ сферического тела. На рисунке 5а приведена экспериментальная зависимость модуля горизонтальной составляющей момента трения $|\widehat{M}_{roll}|$ от модуля горизонтальной составляющей угловой скорости $|\widehat{\omega}_{roll}|$. На рисунке 5b приведена зависимость косинуса угла между направлением

Рис. 4. а) Типовая зависимость $|\widehat{M}_{roll}|$ в первые 5 секунд движения. б) Типовая зависимость изменения $|\widehat{M}_{spin}|$ от времени при качении сферического тела.

Рис. 5. Представлены зависимости а) модуля горизонтальной составляющей момента трения качения $|\widehat{M}_{roll}|$ от модуля угловой скорости качения $|\widehat{\omega}_{roll}|$, б) косинуса угла между моментом трения качения $\widehat{M}_{roll}$ и горизонтальной составляющей угловой скорости $\widehat{\omega}_{roll}$.

ем момента трения качения $\widehat{M}_{roll}$ и горизонтальной составляющей угловой скорости $\widehat{\omega}_{roll}$ от времени. Точками показаны значения, рассчитанные по экспериментальным данным.

Приведенные на рисунке 5b экспериментальные данные хорошо подтверждают противоположную направленность $\widehat{M}_{roll}$ и $\widehat{\omega}_{roll}$.

Зависимость $|\widehat{M}_{roll}|(|\widehat{\omega}_{roll}|)$, приведенную на рисунке 5a, можно аппроксимировать различными функциями. В рамках данной работы нами были рассмотрены линейная и квадратичная аппроксимации. Результаты такой аппроксимации для приведенных выше экспериментальных данных, полученные методом наименьших квадратов, имеют вид

$$|M_{roll}^{lin}| = 0.000342114|\omega_{roll}|, \quad |M_{roll}^{quad}| = 0.000052575|\omega_{roll}|^2. \quad (2.2)$$

На рисунке 5a полученной линейной зависимости соответствует пунктирная линия, а квадратичной — сплошная.

Среднеквадратичные отклонения экспериментальных данных от полученных аппроксимирующих зависимостей составляют для линейной модели $\sigma_l = 0.00102$, для квадратичной модели $\sigma_q = 0.0018$. Это позволяет сделать вывод, что при угловой скорости качения, изменяющейся в диапазоне $|\omega| < 5$, для описания движения сферического тела лучше подходит линейная зависимость момента трения от угловой скорости. Таким образом, зависимость $\widehat{M}_{roll}$ от $\widehat{\omega}_{roll}$ наилучшим образом аппроксимируется функцией

$$M_{roll} = -\mu_{roll}(\omega - (\omega, \gamma)\gamma), \quad \mu_{roll} = 0.000342. \quad (2.3)$$

Адекватность линейной модели вязкого трения качения подтверждают также результаты сравнения (см. рис. 6) компонент момента трения качения, восстановленных по экспериментальным данным из уравнения (1.5) и построенных в рамках модели (2.3).

Рис. 6. Зависимости компонент момента трения качения, восстановленных по экспериментальным данным (черным цветом) и рассчитанных в рамках линейной модели вязкого трения (2.3) (серым цветом).

Отметим, что, несмотря на хорошее согласование зависимостей M_{roll} с экспериментом, теоретические зависимости $\gamma(t)$ и траектория шара на плоскости могут существенно отличаться от экспериментальных (см. рис. 7). Это объясняется погрешностями определения начальных условий и других параметров движения, а также погрешностями, вносимыми численным дифференцированием экспериментальных данных.

Рис. 7. Сравнение теоретических зависимостей при $\mu_{roll} = 0.000342$ с экспериментальными данными (маркерами показаны экспериментальные зависимости, сплошной линией — теоретические): а) типовая зависимость компоненты γ_2 от времени при качении сферического тела, б) типовая зависимость компоненты γ_3 .

Для минимизации влияния указанных погрешностей определим коэффициент трения не из экспериментальной зависимости $\widehat{M}_{roll}(\widehat{\omega})$, а с помощью непосредственной аппроксимации экспериментальных зависимостей $\widehat{\gamma}(t)$ решением дифференциальных уравнений (1.1), (1.5), (2.3). При этом будем искать коэффициент трения μ_{roll} методом наименьших квадратов, чтобы отклонение решения уравнений (1.1), (1.5) от экспериментальных данных было минимальным. Рассчитанный с помощью данного метода коэффициент трения для экспериментальных данных, приведенных выше, равен $\mu_{roll} = 0.00025$. Результаты сравнения экспериментальных данных и теоретических траекторий, построенных при данном коэффициенте трения, приведены на рисунке 8. На этом рисунке маркерами изображены экспериментальные данные $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$, а соответствующие теоретические зависимости — сплошными линиями. Как видно из рисунка, теоретические зависимости достаточно хорошо совпадают с экспериментальными данными.

Наблюдаемое на рисунке 8 расхождение с экспериментальными данными связано с неточным определением положения центра масс и момента инерции шара. Для учета подобных погрешностей определения параметров системы необходимо минимизировать отклонение теоретической траекторий от экспериментальной не только по коэффициенту трения, но и по другим параметрам системы — моменту инерции, положению центра масс, начальным условиям траектории. Это позволит повысить точность определения коэффициента трения, однако существенно повысит и вычислительные затраты на его нахождение.

Рис. 8. Сравнение теоретических зависимостей при $\mu_{roll} = 0.00025$ с экспериментальными данными (маркерами показаны экспериментальные зависимости, сплошной линией — теоретические): а) типовая зависимость компоненты γ_2 от времени при качении сферического тела, б) типовая зависимость компоненты γ_3 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что предложенная модель может быть использована для определения коэффициентов трения только в случае качения без проскальзывания. Эксперименты показали, что наличие проскальзывания приводит к неоднозначным изменениям результатов вычислений коэффициента трения в рамках неголономной модели.

Представленные экспериментальные методики определения коэффициентов трения были апробированы на качении сферического тела по разным материалам. Параметры движения и момент трения качественно совпадают с соответствующими экспериментальными зависимостями, приведенными ранее. Но, например, при качении экспериментального образца по стеклу коэффициент трения $\mu_{roll} = 0.00016$.

3. Заключение

Предложенная линейная модель вязкого трения при качении без проскальзывания с достаточной точностью описывает динамику качения сферических тел по горизонтальной плоскости для выбранного интервала угловых скоростей. В дальнейшем мы планируем верифицировать предложенную модель на более сложных режимах качения, включающих в себя, помимо прочего, и вращение шара вокруг вертикали. Кроме того, планируется использовать данную модель для объяснения ряда динамических эффектов, наблюдаемых при качении несбалансированных шаров.

Авторы выражают благодарность И. С. Мамаеву и А. В. Борисову за плодотворные обсуждения и полезные замечания.

References

- [1] Borisov A. V., Karavaev Yu. L., Mamaev I. S., Erdakova N. N., Ivanova T. B., Tarasov V. V. Experimental investigation of the motion of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 518–541.
- [2] Karavaev Yu. L., Kilin A. A. Nonholonomic dynamics and control of a spherical robot with an internal omniwheel platform: Theory and experiments, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 295, pp. 158–167; see also: *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 2016, vol. 295, pp. 174–183.
- [3] Kilin A. A., Karavaev Yu. L. Experimental research of dynamic of spherical robot of combined type, *Nelin. Dinam.*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 721–734 (Russian).
- [4] Firlej Sz. Design, construction and control of a spherical rolling robot with internal two-wheel cart, *Automatyka/Automatics*, 2015, vol. 19, no. 2, pp. 63–77.
- [5] Kilin A. A., Pivovarova E. N., Ivanova T. B. Spherical robot of combined type: Dynamics and control, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 716–728.
- [6] Terekhov G., Pavlovsky V. Controlling spherical mobile robot in a two-parametric friction model, *MATEC Web Conf.*, 2017, vol. 113, 02007, 5 pp.
- [7] Kayacan E., Bayraktaroglu Z., Saeys W. Modeling and control of a spherical rolling robot: A decoupled dynamics approach, *Robotica*, 2012, vol. 30, no. 4, pp. 671–680.
- [8] Ishkhanyan M. V., Karapetyan A. V. Dynamics of a homogeneous ball on a horizontal plane with sliding, spinning, and rolling friction taken into account, *Mech. Solids*, 2010, vol. 45, no. 2, pp. 155–165; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2010, no. 2, pp. 3–14.
- [9] Zhuravlev V. F. On a model of dry friction in the problem of the rolling of rigid bodies, *J. Appl. Math. Mech.*, 1998, vol. 62, no. 5, pp. 705–710; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1998, vol. 62, no. 5, pp. 762–767.
- [10] Kudra G., Awrejcewicz J. Application and experimental validation of new computational models of friction forces and rolling resistance, *Acta Mech.*, 2015, vol. 226, no. 9, pp. 2831–2848.
- [11] Contensou P. Couplage entre frottement de pivotement et frottement de pivotement dans la théorie de latoupie, in *Kreiselp Probleme Gyrodynamics: IUTAM Symp. Celerina*, Berlin: Springer, 1963, pp. 201–216.
- [12] Moshchuk N. K. On the motion of Chaplygin's sphere on a horizontal plane, *J. Appl. Math. Mech.*, 1983, vol. 47, no. 6, pp. 733–737; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1983, vol. 47, no. 6, pp. 916–921.
- [13] Munitsyna M. A. The motions of a spheroid on a horizontal plane with viscous friction, *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 2, pp. 154–161; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2012, vol. 76, no. 2, pp. 214–223.
- [14] Borisov A. V., Kilin A. A., Karavaev Yu. L. On the retrograde motion of a rolling disk, *Physics–Uspekhi*, 2017, vol. 60, no. 9, pp. 931–934; see also: *Uspekhi Fiz. Nauk*, 2017, vol. 187, no. 9, pp. 1003–1006.
- [15] Domenech A., Domenech T., Cebrian J. Introduction to the study of rolling friction, *Am. J. Phys.*, 1987, vol. 55, no. 3, pp. 231–235.
- [16] Cross R. Coulomb's law for rolling friction, *Am. J. Phys.*, 2016, vol. 84, no. 3, pp. 221–230.
- [17] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 8, no. 3, pp. 277–328.
- [18] Kilin A. A., Pivovarova E. N. The rolling motion of a truncated ball without slipping and spinning on a plane, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 298–317.
- [19] Borisov A. V., Kazakov A. O., Pivovarova E. N. Regular and chaotic dynamics in the rubber model of a Chaplygin top, *Nelin. Dinam.*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 277–297 (Russian).
- [20] Ma D., Liu C., Zhao Zh., Zhang H. Rolling friction and energy dissipation in a spinning disc, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Sci.*, 2014, vol. 470, no. 2169, 20140191, 22 pp.
- [21] Ma D., Liu C. Dynamics of a spinning disk, *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, 2016, vol. 83, no. 6, 061003, 7 pp.
- [22] Leine R. L. Experimental and theoretical investigation of the energy dissipation of a rolling disk during its final stage of motion, *Arch. Appl. Mech.*, 2009, vol. 79, no. 11, pp. 1063–1082.

The dynamical model of the rolling friction of spherical bodies on a plane without slipping

Yury L. Karavaev¹, Anton V. Klekovkin², Alexander A. Kilin²

^{1,2}M. T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University
ul. Studencheskaya 7, Izhevsk, 426069, Russia

³Udmurt State University
ul. Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia

¹karavaev_yury@istu.ru, ²kianvlad@mail.ru, ³aka@rcd.ru

In this paper the model of rolling of spherical bodies on a plane without slipping is presented taking into account viscous rolling friction. Results of experiments aimed at investigating the influence of friction on the dynamics of rolling motion are presented. The proposed dynamical friction model for spherical bodies is verified and the limits of its applicability are estimated. A method for determining friction coefficients from experimental data is formulated.

MSC 2010: 70F40, 70F35, 70E18

Keywords: rolling friction, dynamical model, spherical body, nonholonomic model, experimental investigation

Received November 17, 2016, accepted March 10, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 599–609 (Russian)