УДК: 629.195.1+531.1

MSC 2010: 00A71, 37J25, 37J40, 37J45, 68U20, 70E55, 74H15

Движение спутника с переменным распределением масс в центральном поле сил гравитации

А. А. Буров, И. И. Косенко

В рамках так называемого спутникового приближения, когда задается эллиптическое кеплерово движение центра масс спутника (или тесной группы космических аппаратов), а относительное движение системы предполагается не влияющим на ее орбитальное движение, строятся конфигурации относительного равновесия и анализируется устойчивость этих конфигураций. Предполагается, что главные центральные оси инерции спутниковой системы движутся как твердое тело, а массы могут перераспределяться так, что могут меняться моменты инерции. Таким образом, вся конфигурация может совершать пульсирующие движения, меняясь в размерах.

Выводится система уравнений движения такого составного спутника. Показано, что эта система во многом аналогична известному уравнению В. В. Белецкого плоских колебаний спутника на эллиптической орбите. Как и в упомянутом уравнении, здесь в качестве независимой переменной используется истинная аномалия. Оказалось, что в задаче имеются плоские маятниковые качания всей системы, которые при малых значениях эксцентриситета орбиты центра масс можно рассматривать как возмущения математического маятника.

Получено 22 октября 2017 года
После доработки 09 ноября 2017 года

Статья была подготовлена А. А. Буровым (разделы 1, 2, 3, 5) в ВЦ им. А. А. Дородницына РАН при поддержке РФФИ, проект № 16-01-00625а, и И. И. Косенко (раздел 4 и численное моделирование) в МАИ при поддержке РНФ, проект № 14-21-00068.

Буров Александр Анатольевич
aburov@ccas.ru

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40
Высшая школа экономики (Национальный исследовательский университет)
101000, Россия, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20

Косенко Иван Иванович
kosenkoii@gmail.com

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
125993, Россия, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

В этом случае можно ввести переменные действие – угол и рассмотреть динамику отображений за период неавтономного возмущения. В итоге оказалось возможным применить известную теорему Мозера об инвариантной кривой для закручивающих отображений кольца и получить общую картину движения в случае плоских колебаний системы. Таким образом, все изложение в статье распадается на две темы: а) общий динамический анализ плоского относительного движения спутника с использованием КАМ-теории; б) конструирование семейств периодических решений, зависящих от параметра возмущения и «растущих» из положения равновесия вместе с ростом величины возмущения. Последние семейства зависят от параметра возмущения и отсутствуют в невозмущенной задаче.

Ключевые слова: КАМ-теория, теорема Мозера об инвариантной кривой, переменные действие – угол, периодические решения, аналитические разложения

Введение

Рассматривается динамика космического аппарата (КА) с переменным распределением масс в центральном поле ньютоновского притяжения. В рамках так называемого спутникового приближения выводятся уравнения пространственных относительных движений КА. В частности, демонстрируется вывод уравнений при помощи вариационного принципа Гамильтона. Указываются специальные правила перераспределения масс, которые обеспечивают предписанные относительные движения.

Можно отметить три класса наблюдений, относящихся к динамике КА с переменным распределением масс. Прежде всего это эффекты, связанные с «естественным» перераспределением масс вследствие перемещений экипажа, перетекания жидкостей и т. п. Эти эффекты и методы компенсации возникающих при этом нежелательных движений изучались в многочисленных публикациях [20, 26, 41]. Другая категория эффектов относится к возможности использования перераспределения масс КА для обеспечения поступательного движения его центра масс. Эта идея, принадлежащая Белецкому и Гиверцу [2, 4] и развитая Доновым [10], была предметом жарких дискуссий, в том числе и в научно-популярной литературе [9]. Позднее аналогичные задачи интенсивно изучались [31, 35, 40], в частности, в рамках теории относительности [27, 37, 42]. Наконец, относительное движение КА, допускающего перераспределение масс, изучалось в [32–34]. Кроме того, справедливости ради можно отметить, что исследование движений, возникающих из-за перераспределения масс в динамике систем тел, является в настоящее время полем интенсивных поисков [11–13, 23, 24].

1. Спутниковое приближение и истинная аномалия как независимая переменная

Известно, что в рамках так называемого спутникового приближения предполагается, что размеры спутника значительно меньше, чем расстояния от притягивающей планеты, предполагаемой гравитирующим центром. Таким образом, вследствие этого предположения уравнения движения центра масс спутника отделяются от уравнений, описывающих динамику его относительного движения. Другими словами, в рамках рассматриваемого приближения относительное движение спутника не влияет на динамику его центра масс. Если

распределение масс в спутнике меняется, то аргументация В.В.Белецкого [3], позволяющая использовать истинную аномалию для описания динамики относительного движения, остается справедливой.

Пусть ν является истинной аномалией орбиты центра масс C . Его движение задается при помощи полярных координат (ν, r) в плоскости орбиты:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad r^2 \frac{d\nu}{dt} = \sqrt{\mu p}, \quad (1.1)$$

где μ является произведением постоянной гравитации и массы притягивающего центра. Здесь и далее полагаем, что p и e являются, соответственно, параметром эллиптической орбиты и ее эксцентриситетом. Очевидно, что точка C остается в плоскости орбиты π , инвариантной в абсолютном пространстве. В силу (1.1) истинная аномалия ν является монотонно растущей функцией времени и справедливо соотношение

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1 + e \cos \nu)^2 = f_\mu(\nu) = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} f(\nu).$$

Обозначим $Cx_1x_2x_3$ систему координат (BFF — Body Fixed Frame), связанную с телом корпуса спутника, с осями, направленными вдоль главных центральных осей тела. В BFF матрица тензора инерции имеет вид $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$. Здесь и далее для определенности и простоты рассматриваются только такие вариации распределения масс, для которых оси BFF остаются неизменными в теле. Такое предположение, в частности, реализуется в случае крестообразного тела [5, 7, 39].

Уравнения относительного движения тела имеют вид

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q}.$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ есть абсолютная угловая скорость тела, а $\mathbf{Q}$ — момент сил ньютоновского притяжения.

Замена независимой переменной $t \mapsto \nu$ может быть реализована при помощи формулы

$$\frac{d}{dt} = f_\mu(\nu) \frac{d}{d\nu}.$$

Тогда, обозначая $\boldsymbol{\omega} = f_\mu \boldsymbol{\Omega}$, уравнения относительного движения можно переписать в виде

$$f_\mu \frac{d}{d\nu} (f_\mu \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}) = f_\mu^2 \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}. \quad (1.2)$$

Введем орбитальную вращающуюся систему координат $OX_\alpha X_\beta X_\gamma$ (аббревиатура ORF — Orbital Rotating Frame). Ее ось OX_γ указывает от притягивающего центра O к центру масс спутника C . Ось OX_α перпендикулярна оси OX_γ , расположена в плоскости π и направлена в сторону движения. Ось OX_β перпендикулярна плоскости π и дополняет две другие оси до правой тройки. Обозначим орты этих осей как $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$. Пусть $\boldsymbol{\Omega}'$ есть вектор угловой скорости спутника относительно ORF. Тогда

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}' + \boldsymbol{\beta},$$

и уравнения (1.2), описывающие динамику относительно ORF, примут вид

$$f_\mu \frac{d}{d\nu} [f_\mu \mathbf{I}(\boldsymbol{\Omega}' + \boldsymbol{\beta})] = f_\mu^2 \mathbf{I}(\boldsymbol{\Omega}' + \boldsymbol{\beta}) \times (\boldsymbol{\Omega}' + \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{Q}. \quad (1.3)$$

Уравнения Пуассона для ортов ORF представляются как

$$\frac{d}{d\nu}\alpha = \alpha \times \Omega', \quad \frac{d}{d\nu}\beta = \beta \times \Omega', \quad \frac{d}{d\nu}\gamma = \gamma \times \Omega'. \quad (1.4)$$

Поскольку в спутниковом приближении получаем

$$\mathbf{Q} = 3\frac{\mu}{p^3}(1 + e \cos \nu)^3 \gamma \times \mathbf{I}\gamma = 3f_\mu^2(1 + e \cos \nu)^{-1} \gamma \times \mathbf{I}\gamma,$$

то, опуская штрихи, в конечном итоге из (1.3), (1.4) получаем, соответственно,

$$\frac{d[(1 + e \cos \nu)^2 \mathbf{I}(\Omega + \beta)]}{d\nu} = (1 + e \cos \nu)^2 \mathbf{I}(\Omega + \beta) \times (\Omega + \beta) + 3(1 + e \cos \nu) \gamma \times \mathbf{I}\gamma, \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{d\nu}\alpha = \alpha \times \Omega, \quad \frac{d}{d\nu}\beta = \beta \times \Omega, \quad \frac{d}{d\nu}\gamma = \gamma \times \Omega. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.5), дополненные соотношениями (1.6), являются не чем иным, как пространственным аналогом уравнения Белецкого [3] для случая спутников с переменным распределением масс.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Использование переменных, аналогичных истинной аномалии, в задачах небесной механики начинается, вероятно, в публикациях [36, 38]. Однако интенсивное применение истинной аномалии в задачах динамики полета тесно связано с именем Белецкого [1–3] (см. также работы [17, 19, 22]).

2. Получение уравнений движения из вариационного принципа Гамильтона

Можно попытаться вывести полученные выше уравнения движения с использованием вариационного принципа Гамильтона. Для этого запишем функцию Лагранжа. Принимая во внимание использование истинной аномалии ν в качестве независимой переменной, эту функцию можно получить в виде

$$\begin{aligned} L_\mu &= f_\mu^{-1} \left[\frac{1}{2} f_\mu^2 (\mathbf{I}(\Omega + \beta), \Omega + \beta) - \frac{3}{2} f_\mu^2 (1 + e \cos \nu)^{-1} (\mathbf{I}\gamma, \gamma) \right] = \\ &= \frac{1}{2} f_\mu (\mathbf{I}(\Omega + \beta), \Omega + \beta) - \frac{3}{2} f_\mu (1 + e \cos \nu)^{-1} (\mathbf{I}\gamma, \gamma) = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} L(\Omega, \beta, \gamma, \nu), \end{aligned}$$

и уравнения движения могут быть записаны как

$$\frac{d}{d\nu} \frac{\partial L}{\partial \Omega} = \frac{\partial L}{\partial \Omega} \times \Omega + \frac{\partial L}{\partial \beta} \times \beta + \frac{\partial L}{\partial \gamma} \times \gamma$$

или в явном виде

$$\frac{d}{d\nu} [f \mathbf{I}(\Omega + \beta)] = f \mathbf{I}(\Omega + \beta) \times \Omega + f \mathbf{I}(\Omega + \beta) \times \beta + 3f(1 + e \cos \nu)^{-1} \gamma \times \mathbf{I}\gamma. \quad (2.1)$$

Уравнения (2.1), очевидно, совпадают с уравнениями (1.5).

3. Управление пространственной ориентацией при помощи распределения масс. Закон управления и существование положений относительного равновесия

Вариации в распределении масс приводят к вариациям матрицы тензора инерции. Это дает некоторые возможности для управления ориентацией КА. Например, справедливо следующее

Утверждение 1. Если вариации тензора инерции удовлетворяют условию

$$(1 + e \cos \nu)^2 \mathbf{I}(\nu) = \mathbf{I}_*, \quad \mathbf{I}_* = \text{const}, \quad (3.1)$$

то существуют 24 положения относительного равновесия спутника. Для этих положений оси инерции спутника параллельны соответствующим координатным осям ORF .

ПРОВЕРКА. Действительно, если условия (3.1) выполняются, то уравнения движения можно переписать в виде

$$\frac{d}{d\nu} [\mathbf{I}_*(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\beta})] = \mathbf{I}_*(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\beta}) \times (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\beta}) + 3(1 + e \cos \nu)^{-1} \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{I}_* \boldsymbol{\gamma}, \quad (3.2)$$

который можно реализовать прямой подстановкой, принимая во внимание то, что коэффициент перед скобками под знаком производной является постоянным.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $e \approx 1$, то коэффициент $(1 + e \cos \nu)$ периодически приближается к нулевому значению. Это приводит к трудностям, связанным с приближением к нулю множителя при старшей производной, как в уравнении Белецкого (1.5), так и в (3.2). Оказывается, методы, развитые в [14, 15], для преодоления упомянутых трудностей для уравнения Белецкого остаются эффективными для уравнений (3.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условия (3.1) кажутся естественными в широком классе возможных законов перераспределения масс. Выбор подходящего закона для обеспечения желаемых динамических свойств является предметом дальнейших исследований.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие (3.1) выполняется, в частности, для гомотетично изменяемых тел с центром гомотетии, совпадающим с центром масс. Исследование движений таких тел восходит к Д. Н. Зейлигеру [25, 28].

Предположим, что условия (3.1) выполняются. Тогда среди решений, упомянутых в утверждении 1, имеется, в частности, решение

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0, \quad \beta_1 = \beta_3 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad (3.3)$$

существующее при всех значениях эксцентриситета e и задающее положение относительного равновесия. Более того, для всех величин эксцентриситета, имеющих физический смысл, существуют плоские колебания и вращения спутника вокруг оси инерции, перпендикулярной плоскости орбиты. Для этих движений имеем

$$\Omega_1 = \Omega_3 = 0, \quad \beta_1 = \beta_3 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \alpha_2 = \gamma_2 = 0. \quad (3.4)$$

Если φ обозначает угол поворота спутника, то

$$\Omega_2 = \varphi', \quad \alpha_1 = \cos \varphi, \quad \alpha_3 = \sin \varphi, \quad \gamma_1 = -\sin \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \varphi. \quad (3.5)$$

Положение относительного равновесия (3.3) соответствует условию $\varphi = 0$.

4. Нелинейная динамика: общие замечания

Используя замену $\delta = 2\varphi$, можно записать уравнение плоских колебаний спутника, удовлетворяющее условию (3.1), в виде

$$(1 + e \cos \nu) \delta'' + K \sin \delta = 0. \quad (4.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Здесь и далее мы рассматриваем уравнение (4.1) только для величин $K > 0$. Действительно, данное уравнение инвариантно относительно преобразования $(K, \delta) \mapsto (-K, \delta + \pi)$.

Необходимые условия устойчивости положения равновесия (3.3) для возмущений в плоскости орбиты, задаваемых уравнением (4.1), а также неинтегрируемость этого уравнения при малых значениях эксцентриситета и хаотическая динамика соответствующей механической системы изучались в [6, 8, 29, 30]. В данной работе мы даем общее динамическое описание на основе применения КАМ-теории [21].

Невозмущенная задача соответствует условию $e = 0$. По аналогии с диаграммами Айнса – Стретта возмущение входит в дифференциальные уравнения параметрически, но в отличие от этих диаграмм здесь мы имеем и в невозмущенном, и в возмущенном случаях нелинейные динамические уравнения.

В частности, легко видеть, что уравнение (4.1) эквивалентно неавтономной гамильтоновой системе с одной степенью свободы, так называемой системе с полутора степенями свободы. Эта гамильтонова система имеет обобщенную координату δ и обобщенный импульс $\gamma = \delta'$ и может быть представлена в форме

$$\delta' = \gamma, \quad \gamma' = -\frac{K}{1 + e \cos \nu} \sin \delta.$$

Функцию Гамильтона можно представить в виде

$$H(\delta, \gamma, \nu) = \frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{K}{1 + e \cos \nu} \cos \delta. \quad (4.2)$$

В невозмущенном случае мы имеем величину эксцентриситета $e = 0$ и функцию Гамильтона вида

$$H_0(\delta, \gamma) = \frac{1}{2} \gamma^2 - K \cos \delta. \quad (4.3)$$

Из последнего можно заключить, что при $e = 0$ соотношение (4.3) задает гамильтониан математического маятника — полностью интегрируемой механической системы.

Заметим, что в возмущенном случае функция Гамильтона допускает представление

$$H(\delta, \gamma, \nu) = H_0(\delta, \gamma) + e H_1(\delta, \nu) + \dots + e^k H_k(\delta, \nu) + \dots \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (4.4)$$

традиционное для теории возмущений. В самом деле, для достаточно малой величины e (на самом деле не обязательно малой) имеет место следующее разложение:

$$\frac{1}{1 + e \cos \nu} = 1 + \dots + (-1)^k e^k \cos^k \nu + \dots \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Легко можно видеть, что разложение (4.4) также удовлетворяется, причем справедливы представления

$$H_1(\delta, \nu) = K \cos \nu \cos \delta, \dots, H_k(\delta, \nu) = K(-1)^k \cos^k \nu \cos \delta, \dots$$

Основным объектом нашего интереса является механическая система, задаваемая функцией Гамильтона (4.2). Эта система будет рассматриваться как возмущение системы, задаваемой гамильтонианом (4.3).

Как уже было замечено, невозмущенная задача при $e = 0$ оказалась просто интегрируемой задачей математического маятника. В этом случае можно ввести переменные действие–угол $(\delta, \gamma) \mapsto (w, I)$ так, что функция Гамильтона может быть представлена в виде $H_0(\delta, \gamma) = \mathcal{H}_0(I)$ [18]. В этом случае система Гамильтона имеет форму

$$w' = \frac{d\mathcal{H}_0}{dI}(I) = \omega(I), \quad I' = 0.$$

Таким образом, можно видеть, что величина $I \equiv I_0 = \text{const}$ соответствует первому интегралу невозмущенной системы. Очевидно, что этот интеграл эквивалентен интегралу энергии $\mathcal{H}_0(I) = h$. Если начать построение отображения Пуанкаре на отрезке времени 2π периода возмущения, то для итерации $(w_0, I_0) \mapsto (w_1, I_1)$ можно получить следующее выражение для дифференциального поворота в области колебаний

$$w_1 = w_0 + \omega(I_0) \cdot 2\pi, \quad I_1 = I_0.$$

Можно убедиться [18], что

$$\frac{d\omega(I_0)}{dI_0} \neq 0. \quad (4.5)$$

Тогда итерированное отображение Пуанкаре для достаточно малых e в возмущенном случае будет иметь аналогичное представление

$$w_1 = w_0 + \omega(I_0) \cdot 2\pi + ef(w_0, I_0, e), \quad I_1 = I_0 + eg(w_0, I_0, e), \quad (4.6)$$

близкое к невозмущенному случаю с достаточно регулярными функциями $f(w_0, I_0, e)$, $g(w_0, I_0, e)$. В последнем случае переменные w_0 , I_0 могут лежать в области немного более узкой, чем область либраций математического маятника.

В возмущенном случае, при $e > 0$, механическая система остается гамильтоновой. По этой причине отображение $(w_0, I_0) \mapsto (w_1, I_1)$, заданное в (4.6), сохраняет фазовую площадь. Добавляя сюда условие (4.5) дифференциального поворота для кольца в фазовой плоскости, заключаем, что удовлетворяются условия известной теоремы Мозера [21] об инвариантной кривой.

Такая инвариантная кривая существует при достаточно малом $e > 0$ в любом кольце, окружающем начало координат. Следовательно, типичная фазовая траектория всегда «зажата» между двумя инвариантными кривыми. По этой причине переменная действия I будет вечно находиться около своего начального значения. Кроме того, если начальные значения фазовых переменных находятся в малой окрестности начала координат, которое здесь является положением равновесия, то это положение будет устойчиво по Ляпунову в невозмущенном (при $e = 0$) случае. В случае наличия возмущений можно гарантировать, что решение будет вечно оставаться в достаточно малой окрестности положения равновесия. На рисунке можно видеть типичную картину развития хаоса при наложении возмущения. Этот хаос развивается из окрестности сепаратрисы в направлении областей колебаний и вращений.

Рис. 1. Развитие хаоса из окрестности сепаратрисы при $e = 0.08$.

5. Нелинейная динамика: плоские периодические колебания

Сфокусируем теперь свое внимание на исследовании малых нелинейных колебаний КА. Подставляя $\delta \mapsto e\delta$ в (4.1) и предполагая, что

$$K = k_0 + ek_1 + e^2k_2 + \dots, \quad (5.1)$$

после соответствующих преобразований в (4.1) получим

$$(1 + e \cos \nu)\delta'' + (k_0 + ek_1 + \dots) \left(\delta - e^2 \frac{\delta^3}{6} + \dots \right) = 0. \quad (5.2)$$

Как известно, для

$$k_0 = \frac{n^2}{4}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.3)$$

2π -периодические решения уравнения (5.2) можно представить в форме

$$\delta(\nu) = p \sin\left(\frac{n}{2}\nu\right) + q \cos\left(\frac{n}{2}\nu\right) + e\delta_1 + e^2\delta_2 + \dots \quad (5.4)$$

Подстановка (5.3), (5.4) в (5.2) приводит к бесконечной счетной системе дифференциальных уравнений. Ее пошаговое решение и пошаговое исключение секулярных членов дает периодическое решение (5.4) в форме ряда, зависящего от параметра e . Коэффициенты этого ряда являются функциями, периодическими по переменной ν . Более того, условия исчезновения секулярных членов позволяют найти коэффициенты в разложении (5.1).

Поскольку условие $\delta = 0$ можно рассматривать как условие, задающее сечение Пуанкаре, то далее будем полагать, что

$$q = 0. \quad (5.5)$$

Предположим, что $n = 1$. На первом шаге исключение секулярного члена приводит к условию

$$p \left(k_1 + \frac{1}{8} \right) \cos \left(\frac{1}{2} \nu \right) - q \left(k_1 - \frac{1}{8} \right) \sin \left(\frac{1}{2} \nu \right) \equiv 0 \quad \forall \nu \in R. \quad (5.6)$$

Тождество (5.6) удовлетворяется, если выполняется либо

$$k_1 = -\frac{1}{8}, \quad q = 0, \quad (5.7)$$

либо

$$k_1 = \frac{1}{8}, \quad p = 0. \quad (5.8)$$

В силу (5.5) мы выбираем условие (5.7). Тогда решения (5.4) существуют, если

$$K = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} e + \frac{(2p-3)(2p+3)}{128} e^2 + \frac{8p^2+9}{2048} e^3 + \frac{48p^4-520p^2-603}{32768} e^4 + \dots,$$

и получаем подходящие коэффициенты

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -\frac{p}{16} \sin \left(\frac{3}{2} \nu \right) + \frac{3p}{16} \sin \left(\frac{1}{2} \nu \right), \\ \delta_2 &= \frac{3p}{256} \sin \left(\frac{5}{2} \nu \right) + \frac{p(2p^2-3)}{384} \sin \left(\frac{3}{2} \nu \right) - \frac{p(4p^2+9)}{256} \sin \left(\frac{1}{2} \nu \right), \\ \delta_3 &= -\frac{25p}{8192} \sin \left(\frac{7}{2} \nu \right) - \frac{p(16p^2-15)}{12288} \sin \left(\frac{5}{2} \nu \right) + \\ &\quad + \frac{p(8p^2-55)}{4096} \sin \left(\frac{3}{2} \nu \right) + \frac{p(16p^2+1365)}{24576} \sin \left(\frac{1}{2} \nu \right), \\ \delta_4 &= \frac{245p}{262144} \sin \left(\frac{9}{2} \nu \right) + \frac{p(896p^2-675)}{2359296} \sin \left(\frac{7}{2} \nu \right) + \frac{p(288p^4-2480p^2+32265)}{5898240} \sin \left(\frac{5}{2} \nu \right) - \\ &\quad - \frac{p(512p^2+1731)}{393216} \sin \left(\frac{3}{2} \nu \right) - \frac{p(144p^4-1976p^2+12123)}{589824} \sin \left(\frac{1}{2} \nu \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Как можно видеть, это решение является нечетной функцией от независимой переменной.

Предположим теперь, что $n = 2$. Используя параметр $\varepsilon = e^{1/3}$ [19] и учитывая, что условие (5.5) выполняется, находим, что решение

$$\delta(\nu) = p \sin \nu + \varepsilon \Delta_1 + \varepsilon^2 \Delta_2 + \dots \quad (5.10)$$

существует, если выполняется условие

$$K = 1 + \frac{p^2}{8} \varepsilon^2 + \frac{3p^4}{512} \varepsilon^4 + \dots$$

Коэффициенты в решении (5.10) имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 0, \\ \Delta_2 &= -\frac{p^3}{64} \sin \nu + \frac{p^3}{192} \sin 3\nu, \\ \Delta_3 &= -\frac{p}{3} \sin \nu - \frac{p}{6} \sin 2\nu, \\ \Delta_4 &= \frac{p^5}{20480} [-5 \sin \nu + \sin 5\nu]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Рассмотрим периодические решения для $n = 3$. Предполагая, что

$$K = \frac{9}{4} + \frac{9}{256} (8p^2 - 23) e^2 + \frac{9}{2048} (36p^2 - 1) e^3 \frac{9}{262144} (384p^4 - 1936p^2 - 6239) e^4 + \dots,$$

можно записать периодическое решение в виде

$$\delta_1 = \frac{9p}{32} \left(2 \sin \left(\frac{\nu}{2} \right) + \sin \left(\frac{3\nu}{2} \right) - \sin \left(\frac{5\nu}{2} \right) \right), \quad (5.12)$$

$$\delta_2 = p \left[\frac{63}{512} \sin \left(\frac{\nu}{2} \right) - \frac{16p^2 + 117}{1024} \sin \left(\frac{3\nu}{2} \right) - \frac{81}{1024} \sin \left(\frac{5\nu}{2} \right) + \frac{45}{512} \sin \left(\frac{7\nu}{2} \right) + \frac{p^2}{192} \sin \left(\frac{9\nu}{2} \right) \right],$$

$$\delta_3 = p \left[\frac{9(283 + 56p^2)}{16384} \sin \left(\frac{\nu}{2} \right) - \frac{3(984p^2 - 10745)}{573440} \sin \left(\frac{3\nu}{2} \right) - \frac{9(28p^2 + 83)}{16384} \sin \left(\frac{5\nu}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{27(32p^2 + 75)}{81920} \sin \left(\frac{7\nu}{2} \right) - \frac{36p^2 - 245}{8192} \sin \left(\frac{9\nu}{2} \right) - \frac{135p^2}{28672} \sin \left(\frac{11\nu}{2} \right) \right],$$

$$\delta_4 = p \left[\frac{9(74305 + 11468p^2)}{9175040} \sin \left(\frac{\nu}{2} \right) - \frac{8960p^4 + 317664p^2 + 2340135}{36700160} \sin \left(\frac{3\nu}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{27(50785 + 9064p^2)}{36700160} \sin \left(\frac{5\nu}{2} \right) + \frac{9(2725 + 1232p^2)}{655360} \sin \left(\frac{7\nu}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{9(8575 + 7372p^2)}{9175040} \sin \left(\frac{9\nu}{2} \right) - \frac{405(18p^2 - 49)}{1835008} \sin \left(\frac{11\nu}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{6777p^2}{2293760} \sin \left(\frac{13\nu}{2} \right) + \frac{p^4}{20480} \sin \left(\frac{15\nu}{2} \right) \right].$$

Пусть теперь $n = 4$. Тогда, если условие

$$K = 4 + \frac{1}{30} (15p^2 - 44) e^2 + \frac{4}{15} p^2 e^3 + \left(\frac{3p^4}{128} - \frac{41p^2}{300} - \frac{1313}{3375} \right) e^4 + \dots$$

выполняется, коэффициенты для подходящих периодических движений (5.4) будут иметь вид

$$\delta_1 = \frac{2}{15} p (5 \sin \nu + 2 \sin 2\nu - 3 \sin 3\nu),$$

$$\delta_2 = p \left(\frac{8}{45} \sin \nu - \frac{225p^2 + 3296}{14400} \sin 2\nu - \frac{8}{75} \sin 3\nu + \frac{3}{20} \sin 4\nu + \frac{p^2}{192} \sin 6\nu \right),$$

$$\delta_3 = p \left[\left(\frac{13}{75} + \frac{49}{1440} p^2 \right) \sin \nu - \frac{115p^2 - 576}{25200} \sin 2\nu - \left(\frac{49}{2400} p^2 + \frac{7}{225} \right) \sin 3\nu + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} \sin 4\nu + \left(\frac{23}{2016} p^2 - \frac{2}{35} \right) \sin 5\nu + \frac{p^2}{240} \sin 6\nu - \frac{47p^2}{2400} \sin 7\nu \right],$$

$$\delta_4 = p \left[\left(\frac{1229}{37800} p^2 + \frac{1448}{14175} \right) \sin \nu - \left(\frac{4537}{201600} p^2 + \frac{1393439}{11340000} + \frac{1}{4096} p^4 \right) \sin 2\nu - \right. \\ \left. - \left(\frac{1648}{39375} + \frac{1229}{63000} p^2 \right) \sin 3\nu + \left(\frac{4757}{201600} p^2 + \frac{37}{700} \right) \sin 4\nu + \left(\frac{23}{2520} p^2 - \frac{8}{225} \right) \sin 5\nu - \right. \\ \left. - \frac{2501}{201600} p^2 \sin 6\nu - \frac{47}{9000} p^2 \sin 7\nu + \frac{907}{172800} p^2 \sin 8\nu - \frac{1}{20480} p^4 \sin 10\nu \right].$$

Для $n = 5$ условие существования периодических решений запишется в виде

$$K = \frac{25}{4} + \left(-\frac{1775}{768} + \frac{25}{32}p^2 \right) e^2 + \frac{625}{1536}p^2 e^3 + \left(-\frac{4341475}{7077888} + \frac{75}{2048}p^4 - \frac{11075}{49152}p^2 \right) e^4 + \dots$$

Явные выражения для решений являются громоздкими, здесь они опускаются.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В многочисленных примерах эксцентриситет e является малым: $e \sim 10^{-2}$. Это означает, что удержание членов высокого порядка по e представляется бессмысленным. Более того, использованные уравнения движения справедливы в условиях так называемого спутникового приближения, получаемого при удержании квадратичных членов в выражении гравитационного потенциала. Учет членов более высокого порядка приводит к вариациям эксцентриситета e , так что применяемый нами подход теряет смысл.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. С точки зрения теоремы Пуанкаре о существовании и единственности периодического движения, найденные зависящие от параметра движения могут показаться необычными. Они не соответствуют *точным* резонансам, и теорема Пуанкаре здесь неприменима. Более детальное обсуждение этого класса периодических движений можно найти в работе [16].

References

- [1] Beletskii V. V. *Motion of an artificial satellite about its center of mass*, Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1966.
- [2] Beletskii V. V. *Essays on the motion of celestial bodies*, Basel: Birkhäuser, 2001.
- [3] Beletskii V. V. On satellite libration, in *Artificial Earth satellite: Vol. 3*, Moscow: Akad. Nauk SSSR, 1959, pp. 13–31 (Russian).
- [4] Beletsky V. V., Giverts M. E. Motion of a pulsating system in a gravitational field, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1967, vol. 5, no. 6, pp. 304–308 (Russian).
- [5] Burov A. A. The motion of cross-shaped bodies around a fixed point in a central Newtonian force field, *J. Appl. Math. Mech.*, 1996, vol. 60, no. 1, pp. 25–30; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1996, vol. 60, no. 1, pp. 30–36.
- [6] Burov A. A. Oscillations of a vibrating dumbbell on an elliptic orbit, *Dokl. Phys.*, 2011, vol. 56, no. 3, pp. 182–189; see also: *Dokl. Akad. Nauk*, 2011, vol. 437, no. 2, pp. 186–189.
- [7] Burov A. A., Karapetyan A. V. On the motion of cross-shaped bodies, *Mech. Solids*, 1995, vol. 30, no. 6, pp. 11–15; see also: *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1995, vol. 30, no. 6, pp. 14–18.
- [8] Burov A. A., Kosenko I. I. Planar vibrations of a solid with variable mass distribution in an elliptic orbit, *Dokl. Phys.*, 2011, vol. 56, no. 10, pp. 548–552; see also: *Dokl. Akad. Nauk*, 2011, vol. 440, no. 6, p. 760–764.
- [9] Vorobyov I. I. The peculiar travel, *Kvant*, 1974, no. 2, pp. 22–25 (Russian).
- [10] Donovan A. E. Theory of a gravicraft flight, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1971, vol. 9, no. 3, pp. 393–396 (Russian).
- [11] Kozlov V. V., Onishchenko D. A. The motion in a perfect fluid of a body containing a moving point mass, *J. Appl. Math. Mech.*, 2003, vol. 67, no. 4, pp. 553–564; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2003, vol. 67, no. 4, pp. 620–633.
- [12] Kozlov V. V., Ramodanov S. M. The motion of a variable body in an ideal fluid, *J. Appl. Math. Mech.*, 2001, vol. 65, no. 4, pp. 579–587; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2001, vol. 65, no. 4, pp. 592–601.
- [13] Kozlov V. V., Ramodanov S. M. On the motion of a body with a rigid hull and changing geometry of masses in an ideal fluid, *Dokl. Phys.*, 2002, vol. 47, no. 2, pp. 132–135; see also: *Dokl. Akad. Nauk*, 2002, vol. 382, no. 4, pp. 478–481.
- [14] Kosenko I. I. Application of the theory of the Leray–Schauder degree for the approximation of oscillations of a satellite on an elliptic orbit, *Dokl. Phys.*, 2005, vol. 50, no. 10, pp. 532–534; see also: *Dokl. Akad. Nauk*, 2005, vol. 404, no. 5, pp. 625–627.

- [15] Kosenko I. I. The topological degree and the approximation of solutions of irregular problems in mechanics: Oscillations of a satellite in an elliptic orbit, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2008, vol. 149, no. 5, pp. 1539–1566; see also: *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2006, vol. 16, pp. 68–95.
- [16] Malkin I. G. *Some problems in the theory of nonlinear oscillations: In 2 vols.*, Germantown, Md.: United States Atomic Energy Commission, Technical Information Service, 1959.
- [17] Markeev A. P. *Libration points in celestial mechanics and space dynamics*, Moscow: Nauka, 1978 (Russian).
- [18] Markeev A. P. *Theoretical mechanics*, Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2007 (Russian).
- [19] Markeev A. P. *Linear Hamiltonian systems and some problems of stability of the satellite center of mass*, Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2009 (Russian).
- [20] Markov V. E. Compensation of external perturbations applied to a spacecraft via the method of variation of its geometry of masses, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1974, no. 5, pp. 3–9 (Russian).
- [21] Moser J. K. *Lectures on Hamiltonian systems*, Mem. Amer. Math. Soc., No. 81, Providence, R.I.: AMS, 1968.
- [22] Sarychev V. A. *Problems of orientation of satellites*, Itogi Nauki Tekh. Ser. Issled. Kosmich. Prostr., Moscow: VINITI, 1978 (Russian).
- [23] Chernous'ko F. L. On the motion of a body containing a movable internal mass, *Dokl. Phys.*, 2005, vol. 50, no. 11, pp. 593–597; see also: *Dokl. Ross. Akad. Nauk*, 2005, vol. 405, no. 1, pp. 56–60.
- [24] Chernous'ko F. L. Analysis and optimization of the motion of a body controlled by means of a movable internal mass, *J. Appl. Math. Mech.*, 2006, vol. 70, no. 6, pp. 819–842; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2006, vol. 70, no. 6, pp. 915–941.
- [25] Chetaev N. G. *Theoretical mechanics*, Berlin: Springer, 1989.
- [26] Amin R. A., Newton D. J. Research into the effects of astronaut motion on the spacecraft: A review, *Acta Astronaut.*, 2000, vol. 47, no. 12, pp. 859–869.
- [27] Bergamin L., Delva P., Hees A. Vibrating systems in Schwarzschild spacetime: Towards new experiments in gravitation?, *Class. Quantum Grav.*, 2009, vol. 26, no. 18, 185006, 15 pp.
- [28] Burov A. A., Chevallier D. P. Dynamics of affinely deformable bodies from the standpoint of theoretical mechanics and differential geometry, *Rep. Math. Phys.*, 2008, vol. 62, no. 3, pp. 283–321.
- [29] Burov A., Kosenko I. On planar oscillations of a body with a variable mass distribution in an elliptic orbit, *Proc. Inst. Mech. Eng. C J. Mech. Eng. Sci.*, 2011, vol. 225, no. 10, pp. 2288–2295.
- [30] Burov A., Kosenko I. On plane oscillations of a body with a variable mass distribution in an elliptic orbit, in *Proc. of the 7th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC'2011)*, D. Bernardini, G. Rega, F. Romeo (Eds.), Sapienza: Univ. di Roma, 2011.
- [31] Gratus J., Tucker R. An improved method of gravicraft propulsion, *Acta Astronaut.*, 2003, vol. 53, no. 3, pp. 161–172.
- [32] Iñárrrea M., Lanchares V. Chaos in the reorientation process of a dual-spin spacecraft with time-dependent moments of inertia, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2000, vol. 10, no. 5, pp. 997–1018.
- [33] Iñárrrea M., Lanchares V. Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit, *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 2006, vol. 41, no. 1, pp. 86–100.
- [34] Iñárrrea M., Lanchares V., Rothos V. M., Salas J. P. Chaotic rotations of an asymmetric body with time-dependent moments of inertia and viscous drag, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2003, vol. 13, no. 2, pp. 393–409.
- [35] Landis G. Reactionless orbital propulsion using tether deployment, *Acta Astronaut.*, 1992, vol. 26, no. 5, pp. 307–312.
- [36] Levi-Civita T. Sur la résolution qualitative du problème restreinte des trois corps, *Acta Math.*, 1906, vol. 30, no. 1, pp. 305–327.
- [37] Longo M. J. Swimming in Newtonian space-time: Orbital changes by cyclic changes in body shape, *Am. J. Phys.*, 2004, vol. 72, no. 10, pp. 1312–1315.

- [38] Nechvile V. Sur une forme nouvelle d'équations différentielles du problème restreint elliptique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1926, vol. 182, pp. 310–311.
- [39] Pascal M. Sur le mouvement d'un triple bâtonnet dans un champ Newtonien, *J. Méc.*, 1972, vol. 11, no. 1, pp. 147–160.
- [40] Schaefer J. F. Artificial satellite orbit shifting without mass expulsion utilizing gravity gradient, in *Proc. of the 17th Internat. Astronautical Congr. (Madrid, Spain, Oct 1966)*, 9 pp.
- [41] Thomson W. T., Fung Y. C. Instability of spinning space stations due to crew motion, *AIAA J.*, 1965, vol. 3, no. 6, pp. 1082–1087.
- [42] Wisdom J. Swimming in spacetime: Motion by cyclic changes in body shape, *Science*, 2003, vol. 299, pp. 1865–1869.

Motion of a satellite with a variable mass distribution in a central field of Newtonian attraction

Alexander A. Burov¹, Ivan I. Kosenko²

^{1,2}Dorodnitsyn Computing Center of Russian Academy of Sciences
ul. Vavilova 40, Moscow, 119333, Russia

¹Higher School of Economics (National Research University)
ul. Myasnitskaya 20, Moscow, 101000, Russia

²Moscow Aviation Institute (National Research University)

Volokolamskoe sh. 4, Moscow, 125993, Russia

¹aburov@ccas.ru, ²kosenkoii@gmail.com

Within the framework of the so-called satellite approximation, configurations of the relative equilibrium are built and their stability is analyzed. In this case the elliptic Keplerian motion of the satellite/the spacecraft tight group mass center is predefined. The attitude motion of the system does not influence its orbital motion. The principal central axes of inertia are assumed to move as a rigid body. Simultaneously masses of the body can redistribute in a way such that the values of moments of inertia can change. Thus, all configurations can perform pulsing motions changing its own dimensions.

One obtains a system of equations of motion for such a compound satellite. It turns out that the resulting system of equations is similar to the well-known equation of V. V. Beletsky for the satellite in elliptic orbit planar oscillations. We use true anomaly as an independent variable as it is in the Beletsky equation. It turned out that there are planar pendulum-like librations of the whole system which may be regarded as perturbations of the mathematical pendulum.

One can introduce action-angle variables in this case and can construct the dynamics of mappings over the non-autonomous perturbation period. As a result, one is able to apply the well-known Moser theorem on an invariant curve for twisting maps of annulus. After that one can get a general picture of motion in the case of the system planar oscillations. So, the whole description in the paper splits into two topics: (a) general dynamical analysis of the satellite planar attitude motion using KAM theory; (b) construction of periodic solutions families depending on the perturbation parameter and rising from equilibrium as the perturbation value grows. The latter families depend on the parameter of the perturbation and are absent in the non-perturbed problem.

MSC 2010: 00A71, 37J25, 37J40, 37J45, 68U20, 70E55, 74H15

Keywords: KAM theory, Moser theorem on invariant curve, action-angle variables, periodic solutions, analytical developments

Received October 22, 2017, accepted November 09, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 519–531 (Russian)