УДК: 521.13

MSC 2010: 70F07, 70K42, 53A04

Кривые Хилла и точки либрации в ограниченной круговой задаче трех тел с малым ускорением

П. С. Красильников

Исследуется задача построения однопараметрического семейства кривых Хилла в плоской круговой ограниченной задаче трех тел, когда на пассивно гравитирующую точку действует постоянное по модулю реактивное ускорение w . Предполагается, что во все время движения вектор ускорения направлен вдоль оси Ox , соединяющей основные тела. Получены условия существования треугольных и коллинеарных точек либрации в зависимости от w , исследовано поведение измененной силовой функции задачи в точках либрации. Описано шесть топологически разных типов однопараметрических семейств кривых нулевой скорости в зависимости от значений ускорения w . Показано, что типы семейств отличаются числом критических значений постоянной интеграла Якоби, а также упорядочением этих значений. Для системы Земля–Луна построено однопараметрическое семейство кривых Хилла для каждого из шести типов.

Ключевые слова: ограниченная задача трех тел, кривые Хилла, точки либрации, постоянное ускорение

Получено 01 ноября 2017 года

После доработки 08 декабря 2017 года

Исследования выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте.

Красильников Павел Сергеевич

krasil06@rambler.ru

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

125993, Россия, Москва А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4

Введение

В последние годы возродился интерес к задаче межпланетных перелетов с двигателями малой тяги, что обусловлено значительным прогрессом в разработке таких двигателей, увеличением ресурса надежности космических аппаратов, совершенствованием методов управления полетом космических аппаратов. Пионерские работы [1–5], посвященные в основном проблемам оптимизации, получили развитие во многих исследованиях.

В этой статье мы исследуем области возможных движений ЛА в задаче трех тел с электродвигательной установкой (ЭРДУ) на борту, при условии, что ЭРДУ создает постоянное по модулю реактивное ускорение, направленное параллельно оси, соединяющей основные притягивающие тела с массами m_1 , m_2 соответственно. Эта проблема тесно связана с проблемой существования искусственных положений равновесия во вращающейся системе координат (точек либрации), так как изменение топологии семейства кривых Хилла происходит при значениях константы обобщенного интеграла энергии, отвечающей точкам либрации.

Хорошо известно, что точки либрации имеют широкое применение в космодинамике. К примеру, точка либрации L_1 системы Солнце–Земля активно используется в проектах НАСА (NASA — National Aeronautics and Space Administration) и ЕКА (ESA — European Space Agency) для изучения взаимодействия между магнитным полем Земли и солнечным ветром, запущены аппараты ISEE-3, SOHO, ACE, WIND, DSCOVR в окрестность этой точки. Точка L_2 в системе Солнце–Земля является удобным местом для строительства орбитальных космических обсерваторий и телескопов. В этой точке уже находятся аппараты американского и европейского космических агентств — WMAP, «Планк», «Гершель» и Gaia. Эта точка расположена дальше земной тени; известно, что солнечная радиация оказывает свое негативное воздействие на работу приборов.

Применение двигателей малой тяги ведет к смещению коллинеарных точек либрации в зону земной тени. В работе [10] впервые описано использование таких двигателей для создания искусственных смещенных точек либрации и движений в окрестности этих точек. В работе [11] показано, что с помощью малой тяги можно разместить спутник в равнобедренных точках либрации. Используя двигатели малой тяги, можно также стабилизировать смещенные коллинеарные точки либрации в первом приближении [15]. В работе [8] исследована устойчивость компланарных точек либрации в ограниченной задаче трех тел в линейной и нелинейной постановках, в работе [19] получены условия существования и устойчивости в первом приближении точек либрации, расположенных в пространстве.

В статьях [18, 22, 23] исследованы положения равновесия и устойчивость точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел при условии, что одно из тел является излучающим и оказывает световое давление на пассивно гравитирующую точку. Статьи [20, 21, 25] посвящены изучению влияния светового давления на движение спутника с солнечным парусом, в частности, исследуются вопросы существования искусственных положений равновесия спутника, зависящих от величины светового давления.

В работах [6, 7] рассмотрена модель гибридного солнечного паруса. Исследованы вопросы существования и устойчивости в первом приближении искусственных положений равновесия спутника с таким парусом. Исследованию искусственных точек либрации спутника с реактивным двигателем в гравитационном поле двух массивных тел, одно из которых представляет собой сплюснутый сфероид, посвящена статья [17]. В более ранних исследованиях [12–14] приводится анализ существования и устойчивости точек либрации в гравитационном поле однородного (и неоднородного) трехосного эллипсоида в отсутствии каких-либо систем управления.

Поверхности Хилла, ограничивающие области возможных движений спутника в круговой ограниченной задаче трех тел с дополнительным управляющим воздействием от реактивного двигателя либо солнечного паруса, практически не изучены. Можно указать на статью [9], в которой используются поверхности Хилла для анализа движения спутника по квазипериодической орбите, соединяющей окрестность точки $L_1(L_2)$ с окрестностью Земли. В известной монографии [24] поверхности Хилла построены для классической плоской круговой ограниченной задачи трех тел.

Уравнения движения

Рассмотрим движение спутника в гравитационном поле двух притягивающих небесных тел с массой m_1 и m_2 (предполагаем, что $m_2 \leq m_1$). Предположим, что притягивающие тела движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс O с постоянной угловой скоростью вращения n , третье тело (спутник), имеющее бесконечно малую массу, принадлежит во все время движения плоскости вращения основных тел. Считаем также, что на спутник установлен двигатель малой тяги, создающий постоянное по модулю ускорение w , ориентированное вдоль оси, соединяющей основные тела.

Пусть $Oxyz$ — синодическая система координат с началом в точке O . Считаем (см. рис. 1), что плоскости (x, y) принадлежат круговые орбиты основных тел, ось x проходит через притягивающие массы m_1, m_2 , ось z перпендикулярна плоскости (x, y) (на рис. 1 она не показана).

Рис. 1. Координатная система.

Предположим, что реактивное ускорение w параллельно оси Ox во все время движения и постоянно по модулю. Пусть a — расстояние между основными телами, T — период движения основных тел по орбите. Введем следующие единицы измерения: $a = 1$, $m_1 + m_2 = 1$, $T = 2\pi$. Отсюда следует, что $n = 1$.

Уравнения движения имеют следующий вид:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + wx + \frac{1}{2}\mu(1-\mu). \quad (2)$$

Здесь

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Стационарные положения равновесия находятся из уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &\equiv x - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x+\mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-1+\mu) + w = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &\equiv y \left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0.\end{aligned}$$

Эти уравнения отличаются от классических наличием параметра w .

Треугольные точки либрации

Уравнения равновесия при $y \neq 0$ имеют вид

$$\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} = -\frac{w}{(1-\mu)\mu}, \quad \frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} = 1. \quad (3)$$

Рассматривая w и μ как параметры, имеем следующее параметрическое представление решений уравнений (3):

$$\begin{aligned}x(w) &= \frac{1}{2} - \mu + \frac{1}{2} \left(\frac{1-\mu}{1-\mu+w} \right)^{2/3} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\mu-w} \right)^{2/3}, \\ y^2(w) &= \left(\frac{1-\mu}{1-\mu+w} \right)^{2/3} - \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{1-\mu}{1-\mu+w} \right)^{2/3} - \left(\frac{\mu}{\mu-w} \right)^{2/3} \right]^2.\end{aligned} \quad (4)$$

Из второго уравнения системы (4) следует, что треугольные точки либрации существуют только в том случае, когда

$$\left(\frac{1-\mu}{1-\mu+w} \right)^{2/3} - \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{1-\mu}{1-\mu+w} \right)^{2/3} - \left(\frac{\mu}{\mu-w} \right)^{2/3} \right]^2 \geq 0. \quad (5)$$

Если параметры w и μ достаточно малы, то легко показать, что граница области (5) описывается линейной функцией $\mu = kw$, где k — решение уравнения

$$1 - \frac{1}{4} \left[2 - \left(\frac{k}{k-1} \right)^{2/3} \right]^2 = 0.$$

Очевидно, $k = 0$, $k = 8/7$, поэтому в малой окрестности точки $w = \mu = 0$ имеем две граничные кривые $\mu = 0$, $\mu = 8/7w$. Для произвольных значений w и μ область (5) представлена на рисунке 1 (область (5) заштрихована).

Для системы Земля–Луна ($\mu = 0.01215067$) это неравенство накладывает ограничения на область изменения ускорения w :

$$-0.52072411 \leq w \leq 0.010623698. \quad (6)$$

На рисунке 3 изображена кривая (4) для системы Земля–Луна, представляющая собой геометрическое место треугольных точек либрации $L_4(w)$, $L_5(w)$ для разных значений ускорения w . Они располагаются парами, симметрично относительно оси Ox . Классические

Рис. 2. Область существования треугольных точек либрации.

Рис. 3. Кривая треугольных точек либрации

треугольные точки либрации представлены белыми ромбами. Крайние значения w из области существования (6) отвечают нулевым значениям координаты y (треугольные точки сливаются с коллинеарными):

$$y = 0, \quad x(-0.52072411) = 1.27141807; \quad y = 0, \quad x(0.010623698) = -1.00859137.$$

Часть кривой, лежащая справа от вертикальной оси, проходящей через классические треугольные точки либрации, отвечает отрицательным значениям w , так как на этой кривой центробежная сила инерции имеет положительную проекцию на ось Ox . Положительные значения w формируют кривую, лежащую слева от указанной вертикали.

Как известно, поведение функции V в экстремальных точках $L_4(\mu, w)$, $L_5(\mu, w)$ определяется знаком второго дифференциала

$$a(dx)^2 + 2b dx dy + c(dy)^2, \quad a = V_{xx}(L_{4,5}), \quad b = V_{xy}(L_{4,5}), \quad c = V_{yy}(L_{4,5}). \quad (7)$$

Вычисления показывают, что эта квадратичная форма положительно определена для системы Земля–Луна при всех значениях ускорения w из интервала существования треугольных точек либрации, так как

$$a > 0, \quad ac - b^2 > 0.$$

Поэтому, как и в классическом случае, функция V принимает минимальное значение в точках $L_4(w)$, $L_5(w)$, когда $\mu = 0.01215067$, однако это значение зависит от положения точки на кривой (4). Случай $\mu \neq 0.01215067$ не рассматривался.

Для произвольных значений μ и w из области (5) существования треугольных точек либрации можно показать, что значение функции V в точках $L_4(w)$, $L_5(w)$ задается формулой

$$V(L_{4,5}) = -\frac{1}{2} [3(\mu - 1)\beta - 3\mu\alpha + w(2\mu - 1)], \quad \alpha = \left(\frac{\mu - w}{\mu}\right)^{1/3}, \quad \beta = \left(\frac{1 - \mu + w}{1 - \mu}\right)^{1/3}.$$

Для системы Земля–Луна функция $V(L_{4,5})$ является монотонной функцией w :

$$0.9647033585 \leq V(L_{4,5}(w)) \leq 1.501397518, \quad -0.52072411 \leq w \leq 0.010623698.$$

В классическом случае ($w = 0$) мы имеем $V(L_{4,5}) = 1.5$.

Коллинеарные точки либрации

В случае $y = 0$ уравнение равновесия имеет вид

$$F \equiv x - \frac{(1 - \mu)}{|x + \mu|^3} (x + \mu) - \frac{\mu}{|x + \mu - 1|^3} (x - 1 + \mu) + w = 0.$$

Из рисунка 4 следует, что при $w \neq 0$ уравнение $F = 0$ также имеет три вещественных корня, являющихся координатами смещенных коллинеарных точек либрации $L_1(\mu, w)$, $L_2(\mu, w)$, $L_3(\mu, w)$.

Рис. 4. График функции F при $w = 0$.

Рассмотрим точку $L_1(\mu, w)$. Координату x этой точки представим в виде $x = 1 - \mu - \rho_1$, $\rho_1 > 0$. Тогда уравнение относительно ρ_1 примет вид

$$\rho_1^5 - \rho_1^4(3 - \mu + w) + \rho_1^3(3 - 2\mu + 2w) - \rho_1^2(\mu + w) + 2\rho_1\mu - \mu = 0. \quad (8)$$

Для точки $L_2(\mu, w)$ положим $x = 1 - \mu + \rho_2$, $\rho_2 > 0$, имеем уравнение

$$\rho_2^5 + \rho_2^4(3 - \mu + w) + \rho_2^3(3 - 2\mu + 2w) + \rho_2^2(-\mu + w) - 2\rho_2\mu - \mu = 0. \quad (9)$$

Аналогично, для $L_3(\mu, w)$ координату x вычисляем по формуле $x = -\mu - \rho_3$, тогда ρ_3 — положительный корень уравнения

$$\rho_3^5 + \rho_3^4(2 + \mu - w) + \rho_3^3(2\mu + 1 - 2w) + \rho_3^2(\mu - 1 - w) + 2\rho_3(\mu - 1) + \mu - 1 = 0. \quad (10)$$

Исследуем вопрос о поведении силовой функции V в коллинеарных точках либрации. Вычисления показывают, что для системы Земля–Луна коэффициент a квадратичной формы (7) больше нуля для всех трех коллинеарных точек либрации независимо от w .

Однако поведение гессиана $Hess V = ac - b^2$ более сложное. Для внутренней точки либрации L_1 , координата которой ρ_1 может меняться в пределах $(0, 1)$, имеем $Hess V < 0$, поэтому L_1 — седловая точка силовой функции.

Внешняя точка L_2 , для которой ρ_2 может меняться в пределах от 0 до ∞ , отвечает неравенству $Hess V < 0$ только в том случае, когда существуют треугольные точки либрации. Действительно, вычисления показывают, что $Hess V < 0$ при $\rho_2 \in (0, \rho_2^*)$, $\rho_2^* = 0.2835687403$, при этом ρ_2^* соответствует, в силу уравнения (9), ускорению $w = -0.52072411$, при котором треугольная точка либрации сливается с коллинеарной (крайняя правая точка кривой на рис. 3). Если треугольные точки либрации не существуют, то есть $\rho_2 \in (\rho_2^*, +\infty)$, то $Hess V > 0$. Гессиан обращается в нуль при $\rho_2 = \rho_2^*$. Заметим, что интервалу $\rho_2 \in (0, \rho_2^*)$ отвечает интервал $w \in (-0.52072411, +\infty)$.

Таким образом, L_2 является седловой точкой функции V , когда существуют треугольные точки либрации; если треугольных точек либрации нет, то V принимает минимальные значения в L_2 . Случай $\rho_2 = \rho_2^*$ требует отдельного рассмотрения.

Для внешней точки либрации L_3 имеем подобный результат. Гессиан $Hess V < 0$, когда $\rho_3 \in (0, \rho_3^*)$; $Hess V > 0$ для $\rho_3 \in (\rho_3^*, +\infty)$ и $Hess V(\rho_3^*) = 0$ при $\rho_3^* = 0.9964406980$. Из уравнения (10) следует, что ρ_3^* отвечает ускорению $w = 0.01062369831$, когда треугольная точка либрации сливается с коллинеарной (крайняя левая точка на рис. 3). Интервал $\rho_3 \in (0, \rho_3^*)$ отвечает интервалу $w \in (-\infty, 0.010623698)$.

Поэтому L_3 является седловой точкой функции V , когда $w < 0.010623698$, что отвечает условию существования треугольных точек либрации. Функция V достигает минимума в L_3 , когда $w > 0.010623698$ (отсутствуют треугольные точки либрации).

Кривые Хилла в плоской задаче трех тел с ускорением

Исследуем кривые Хилла (кривые нулевой скорости) в плоской круговой задаче трех тел с постоянным ускорением w , ограничивающие области возможных движений точки с массой m_3 . Из обобщенного интеграла энергии

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - wx = h$$

следует, что область возможных движений $v^2 \geq 0$ имеет вид

$$P_C = \{x, y: 2V \geq C\}, \quad C = -2h + \mu(1 - \mu),$$

поэтому уравнение однопараметрических кривых Хилла приводится к классическому виду $2V = C$ при условии, что силовая функция V вычисляется по формуле (2). Семейство кривых имеет особенность, когда

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (11)$$

поэтому топологический тип семейства кривых Хилла меняется в точках либрации.

Выясним прежде всего, как соотносятся между собой значения силовой функции в разных точках либрации. Заметим, что при фиксированном $\mu = 0.01215067$ кривая $2V = C$ параметризована величиной w неявным образом. Можем получить явную параметризацию для одной из точек либрации — L_1 . С этой целью вместо декартовой координаты x точки L_1 введем параметр $\rho_1 \in (0, 1)$ по формуле $x = 1 - \mu - \rho_1$. Тогда w определяется как функция ρ_1 в силу уравнения (8):

$$w = \frac{\rho_1^5 - \rho_1^4(3 - \mu) + \rho_1^3(3 - 2\mu) - \rho_1^2\mu + 2\rho_1\mu - \mu}{\rho_1^4 - 2\rho_1^3 + \rho_1^2}. \quad (12)$$

Эта функция задает взаимно-однозначное отображение $\rho_1 \rightarrow w$, при этом интервалу $\rho_1 \in (0, 1)$ отвечает область изменения $w \in (-\infty, +\infty)$. Очевидно, что V , вычисленная в точке либрации L_1 , есть функция ρ_1 .

Аналогично параметризуем (но неявным образом) кривую $2V = C$ с помощью ρ_1 , когда V вычисляется в точках L_2, L_3 . Для этого вместо декартовой координаты x указанных точек либрации вводим параметры ρ_2, ρ_3 по формулам $x = 1 - \mu + \rho_2$, $x = -\mu - \rho_3$ соответственно. Используя равенства (9), (10), (12), находим ρ_2, ρ_3 как функции ρ_1 , после чего вычисляем $V(L_2), V(L_3)$ как функции ρ_1 . Очевидно, что описанная параметризация эквивалентна параметризации с помощью w .

Положим V_i равным значению V в точке либрации L_i . В силу сказанного выше, $V_i = V_i(\rho_1)$. Заметим, что область изменения параметра ρ_1 , отвечающая условию (6) существования треугольных точек либрации в системе Земля–Луна, имеет вид

$$0.1154881778 \leq \rho_1 \leq 0.1518802318.$$

Пусть $C_i(\rho_1) = 2V_i(\rho_1)$. Поскольку в точках либрации функция V имеет критические значения (см. (11)), то множество $\Sigma(\rho_1) = \{C: C = C_i(\rho_1), i = 1, \dots, 5\}$ принято называть бифуркационным множеством силовой функции V или множеством ее критических значений. Перестройка кривых Хилла идет через бифуркационное множество. Расчеты, проведенные для системы Земля–Луна, показывают, что существует шесть топологически разных типов критического множества $\Sigma(\rho_1)$:

$$\begin{aligned} \Sigma_1(\rho_1) &= \{C_j(\rho_1), j = \overline{1, 3}: C_2 < C_1 < C_3, 0 < \rho_1 < 0.11549\}, \\ \Sigma_2(\rho_1) &= \{C_j(\rho_1), j = \overline{1, 5}: C_5 = C_4 < C_2 < C_1 \leq C_3, 0.11549 \leq \rho_1 \leq 0.14679\}, \\ \Sigma_3(\rho_1) &= \{C_j(\rho_1), j = \overline{1, 5}: C_5 = C_4 < C_2 \leq C_3 < C_1, 0.14679 < \rho_1 \leq 0.14771\}, \\ \Sigma_4(\rho_1) &= \{C_j(\rho_1), j = \overline{1, 5}: C_5 = C_4 < C_3 < C_2 < C_1, 0.14771 < \rho_1 \leq 0.15188\}, \\ \Sigma_5(\rho_1) &= \{C_j(\rho_1), j = \overline{1, 3}: C_3 < C_2 \leq C_1, 0.15188 < \rho_1 \leq 0.15321\}, \\ \Sigma_6(\rho_1) &= \{C_j(\rho_1), j = \overline{1, 3}: C_3 < C_1 < C_2, 0.15321 < \rho_1 < 1\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Разница между разными типами множества $\Sigma(\rho_1)$ основана на различии в числе критических значений C_i и их упорядочении. Граничным точкам интервалов изменения переменной ρ_1 соответствуют появление (исчезновение) треугольных точек либрации (случаи $\rho_1 = 0.11549, 0.15188$) либо пересечение кривых $C_i(\rho_1)$ для разных i . Из формул (13) следует, что значениям $\rho_1 = 0.14679, 0.14771, 0.15321$ отвечают точки пересечения кривых, сгруппированных в пары

$$(C_1(\rho_1), C_3(\rho_1)), (C_2(\rho_1), C_3(\rho_1)), (C_1(\rho_1), C_2(\rho_1)).$$

В таблице 1 представлено соответствие между множествами Σ_j и областями изменения параметра w .

Таблица 1. Области изменения параметра w для разных типов множества Σ

Σ_1	Σ_2	Σ_3
$-\infty < w < -0.52069$	$-0.520689 \leq w \leq -0.04797$	$-0.04797 < w \leq -0.03712$
Σ_4	Σ_5	Σ_6
$-0.03712 < w \leq 0.0106$	$0.01062 < w \leq 0.02537$	$0.02537 < w < \infty$

Рис. 5. Однопараметрическое семейство кривых Хилла для первых двух типов критического множества.

Первый интервал изменения ρ_1 ($0 < \rho_1 < 0.11549$) отвечает семейству кривых Хилла, изображенному слева на рисунке 5. Вычисления проводились для $\rho_1 = 0.09$. Ускорение w и критические значения C_i представлены в таблице:

ρ_1	w	C_2	C_1	C_3
0.09	-1.205021371	-0.019057543	1.0953935052	5.070597256

Рассматриваемый случай характеризуется отсутствием треугольных точек либрации. Для больших, но конечных значений $C \geq C_3(\rho_1)$ имеем кривые, близкие к окружностям, окружающие притягивающие центры по отдельности и в совокупности (красные^a кривые).

^aДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1704007/>

Уменьшение значения C ведет к деформации кривых, но топологический характер кривых Хилла не меняется, пока $C > C_3(\rho_1)$. При $C = C_3$ имеем слияние двух кривых в точке L_3 (внешняя черная кривая, состоящая из двух связных частей). Последующее уменьшение C ($C_1(\rho_1) < C < C_3(\rho_1)$) ведет к разрыву кривых в L_3 и появлению замкнутых кривых, окружающих притягивающий центр m_2 вместе с L_1, L_2 , либо только один центр m_2 (см. две ветви зеленой кривой). При $C = C_1$ замкнутые зеленые кривые соединяются в точке L_1 (внутренняя черная кривая, состоящая из двух связных частей). Уменьшение C ведет к разрыву кривых в L_1 и появлению семейства кривых, окружающих только точку L_2 . При дальнейшем уменьшении C кривые деформируются, уменьшаясь в размерах так, что при $C = C_2$ стягиваются в точку L_2 и пропадают при $C \leq C_2(\rho_1)$.

Отметим, что если $C \geq C_1(\rho_1)$ и при этом начальные условия по координатам принадлежат овалам, окружающим m_1 или m_2 , траектории будут устойчивы по Хиллу.

Второму интервалу изменения ρ_1 ($0.11549 \leq \rho_1 \leq 0.14679$) отвечает более сложная картина кривых Хилла, так как появляются треугольные точки либрации L_4, L_5 . Расчет кривых проводился для $\rho_1 = 0.13$. Соответствующие критические значения C_i приведены в следующей таблице:

ρ_1	w	$C_5 = C_4$	C_2	C_1	C_3
0.13	-0.2716986	2.50136432	2.544343336	2.739606966	3.54727804

Семейство кривых Хилла представлено справа на рисунке 5. Качественное описание кривых Хилла при $C > C_2(\rho_1)$ повторяет описание предыдущего случая. Однако при $C = C_2$ замкнутые кривые, окружающие точку либрации L_2 (см. синие кривые), деформируются в «восьмерку с центром в L_2 ». При $C_4(\rho_1) < C < C_2(\rho_1)$ имеет место разрыв в точке L_2 с появлением двух ветвей кривой Хилла, окружающих точки L_4, L_5 . Дальнейшее уменьшение C ведет к стягиванию кривых в точки L_4, L_5 .

Как и в предыдущем случае, мы имеем устойчивость по Хиллу, когда $C \geq C_1(\rho_1)$.

Третьему интервалу изменения ρ_1 ($0.14679 < \rho_1 \leq 0.14771$) отвечает картина, представленная на рисунке 6 слева.

Полагаем $\rho_1 = 0.147$. Критические значения константы C приводятся в следующей таблице:

ρ_1	w	$C_5 = C_4$	C_2	C_3	C_1
0.147	-0.04548098	2.9342205	3.078753164	3.11489499	3.124037188

Этот случай подобен «классическому» ($w = 0$), но с одним исключением: разрыв кривых Хилла, отвечающих критическим значениям константы C , происходит сначала в точках либрации L_1, L_3 и только потом — в точке L_2 .

Устойчивость по Хиллу имеет место при $C \geq C_3(\rho_1)$.

Рассмотрим четвертый интервал изменения ρ_1 ($0.14771 < \rho_1 \leq 0.15188$). Кривые Хилла изображены на рисунке 6 справа. Расчеты проводились при $\rho_1 = 0.149$. Критические значения константы C представлены ниже:

ρ_1	w	$C_5 = C_4$	C_3	C_2	C_1
0.149	-0.0220980726	2.97121359	3.068409334	3.133020426	3.163313614

Рис. 6. Однопараметрическое семейство кривых Хилла для 3-го и 4-го типов критического множества.

Рис. 7. Однопараметрическое семейство кривых Хилла для 5-го и 6-го типов критического множества.

Этот случай полностью отвечает классическому случаю ($w = 0$ [24]). Изменение топологии семейства кривых Хилла происходит через распад кривых в точках L_1 , L_2 , L_3 , отвечающих критическим значениям C_1 , C_2 , C_3 . Неравенство $C \geq C_2(\rho_1)$ задает устойчивость по Хиллу. Заметим, что некоторые периодические орбиты спутника в областях Хилла описаны в работе [16].

Семейство кривых пятого случая ($0.15188 < \rho_1 \leq 0.15321$) изображено на рисунке 7 слева. Здесь нет треугольных точек либрации. Кривые Хилла отвечают случаю $\rho_1 = 0.1525$. Значения соответствующих критических значений константы C представлены в таблице:

ρ_1	w	C_3	C_2	C_1
0.1525	0.01752552505	2.98881971	3.22463085	3.229652316

При больших значениях C кривые Хилла замкнуты, окружают центры притяжения по отдельности и в совокупности (красные кривые). При уменьшении C кривые деформируются, при этом внутренние кривые увеличиваются в размерах, касаясь внешних кривых в точке L_1 при $C = C_1$. Последующий разрыв в L_1 ($C_2(\rho_1) < C < C_1(\rho_1)$) меняет топологию кривых Хилла, образуя замкнутые кривые, окружающие притягивающие точки m_1 , m_2 и L_1 . При $C = C_2$ появляется общая точка в L_2 у замкнутых кривых. Далее следует разрыв в L_2 ($C_3(\rho_1) < C < C_2(\rho_1)$) и появляются замкнутые кривые, окружающие точку либрации L_3 . При уменьшении C кривые постепенно стягиваются к L_3 , при $C = C_3$ схлопываются в L_3 и исчезают при $C < C_3(\rho_1)$. В случае $C \geq C_2(\rho_1)$ имеем устойчивость по Хиллу.

В заключение рассмотрим шестой вариант изменения переменной ρ_1 ($0.15321 < \rho_1 < 1$). Предположим, что $\rho_1 = 0.2$. Тогда имеем следующие критические значения константы C :

ρ_1	w	C_3	C_1	C_2
0.2	0.4518984980	2.040872856	3.93589548	4.206810938

Кривые Хилла изображены на рисунке 7 справа. Этот случай подобен предыдущему, но есть отличия. Первый разрыв кривых происходит в точке L_2 ($C = C_2(\rho_1)$), потом кривые разрываются в L_1 ($C = C_1(\rho_1)$), и мы имеем замкнутые кривые, окружающие L_3 ($C_3(\rho_1) < C < C_1(\rho_1)$). При уменьшении C кривые постепенно стягиваются к L_3 и при $C = C_3$ схлопываются в L_3 , исчезают при $C < C_3(\rho_1)$. Устойчивость по Хиллу имеет место при $C \geq C_1(\rho_1)$.

Заключение

Описано шесть топологически разных типов однопараметрических семейств кривых нулевой скорости в зависимости от значений ускорения w (таблица 1). Показано, что типы семейств отличаются числом критических значений постоянной интеграла Якоби, а также упорядочением этих значений. Для системы Земля – Луна построено однопараметрическое семейство кривых Хилла для каждого из шести типов.

Поскольку качественное изменение отдельных кривых внутри однопараметрического семейства происходит в точках либрации, подробно описаны условия существования треугольных и коллинеарных точек либрации. Показано, что исчезновение треугольных точек либрации L_4 , L_5 под действием ускорения w ведет к перестройке всего семейства кривых нулевой скорости.

Практически важный случай малых ускорений w отвечает четвертому типу семейств кривых Хилла, когда ускорение w удовлетворяет условию

$$-0.03711534452 < w < 0.010623698.$$

Устойчивость по Хиллу имеет место при $C > C_2(\rho_1)$. Таким образом, при малых значениях ускорения области возможных движений мало меняются, сохраняется устойчивость по Хиллу. Однако при $w > 0.010623698$ либо при $w < -0.03711534452$ наблюдается перестройка областей возможных движений, меняются условия устойчивости по Хиллу.

References

- [1] Melbourne W. G., Sauer C. G. Optimum interplanetary rendezvous with power limited vehicles, *AIAA J.*, 1963, vol. 1, no. 1, pp. 54–60.
- [2] Lawden D. F. *Optimal trajectories for space navigation*, London: Butterworths, 1963.
- [3] Beletsky V. V., Egorov V. A. Interplanetary flights with the constant output engines, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1964, vol. 2, no. 3, pp. 303–330 (Russian).
- [4] Gobitz F. W. Optimal variable thrust transfer of a power limited rocket between neighboring circular orbits, *AIAA J.*, 1964, vol. 2, no. 2, pp. 339–343.
- [5] Johnson D. P., Stumpf L. W. Perturbation solutions for low thrust rocket trajectories, *AIAA J.*, 1965, vol. 3, no. 10, pp. 1934–1936.
- [6] Aliasi G., Mengali G., Quarta A. A. Artificial equilibrium points for a generalized sail in the circular restricted three-body problem, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 2011, vol. 110, no. 4, pp. 343–368.
- [7] Baig S., McInnes C. R. Artificial three-body equilibria for hybrid low-thrust propulsion, *J. Guid. Control Dyn.*, 2008, vol. 31, no. 6, pp. 1644–1654.
- [8] Bombardelli C., Peláez J. On the stability of artificial equilibrium points in the circular restricted three-body problem, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 2010, vol. 109, no. 1, pp. 13–26.
- [9] Bookless J., McInnes C. R. Control of Lagrange point orbits using solar sail propulsion, *Acta Astronaut.*, 2008, vol. 62, nos. 2–3, pp. 159–176.
- [10] Dusek H. M. Motion in the vicinity of libration points of a generalized restricted three-body model, in *Prog. Astronaut. Aeronaut.: Methods in Astrodynamics and Celestial Mechanics: Vol. 17. A Selection of Technical Papers Based Mainly on the American Institute of Aeronautics and Astronautics and Institute of Navigation Astrodynamics Specialist Conference (Monterey, Calif., Sept 16–17, 1965)*, R. L. Duncombe, V. G. Szebehely (Eds.), New York: Acad. Press, 1966, pp. 37–54.
- [11] Farquhar R. W. The control and use of libration-point satellites: *Technical Report NASA-TR-R-346*, Washington, D.C.: Goddard Space Flight Center Greenbelt, 1970.
- [12] Kosenko I. I. On libration points near a gravitating and rotating triaxial ellipsoid, *J. Appl. Math. Mech.*, 1981, vol. 45, no. 1, pp. 18–23; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1981, vol. 45, no. 1, pp. 26–33.
- [13] Kosenko I. I. Non-linear analysis of the stability of the libration points of a triaxial ellipsoid, *J. Appl. Math. Mech.*, 1985, vol. 49, no. 1, pp. 17–24; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1985, vol. 49, no. 1, pp. 16–24.
- [14] Kosenko I. I. On the stability of points of libration of an inhomogeneous triaxial ellipsoid, *J. Appl. Math. Mech.*, 1987, vol. 51, no. 1, pp. 1–5; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1987, vol. 51, no. 1, pp. 3–8.
- [15] Krasil'nikov P. S., Kunitsyn A. L. On the stabilization of the collinear libration points of the restricted circular three-body problem, *Celestial Mech.*, 1977, vol. 15, no. 1, pp. 41–51.
- [16] Krasilnikov P. S., Saraeva A. G. Poincaré periodic orbits of the first kind in the planar circular restricted problem of three bodies with small acceleration, *Cosmic Research*, 2015, vol. 53, no. 6, pp. 469–475; see also: *Kosmicheskie Issledovaniya*, 2015, vol. 53, no. 6, pp. 509–515.
- [17] Ranjana K., Kumar V. On the artificial equilibrium points in a generalized restricted problem of three bodies, *IJAA*, 2013, vol. 3, no. 4, pp. 508–516.
- [18] Kunitsyn A. L., Perezhogin A. A. On the stability of triangular libration points of the photogravitational restricted circular three-body problem, *Celestial Mech.*, 1978, vol. 18, no. 4, pp. 395–408.
- [19] Morimoto M. Y., Yamakawa H., Uesugi K. Artificial equilibrium points in the low-thrust restricted three-body problem, *J. Guid. Control Dyn.*, 2007, vol. 30, no. 5, pp. 1563–1567.
- [20] McInnes C. R. Artificial Lagrange points for a partially reflecting flat solar sail, *J. Guid. Control Dyn.*, 1999, vol. 22, no. 1, pp. 185–187.
- [21] McInnes C. R., MacDonald A. J. C., Simmons J. F. L., MacDonald E. W. Solar sail parking in restricted three-body systems, *J. Guid. Control Dyn.*, 1994, vol. 17, no. 2, pp. 399–406.
- [22] Perezhogin A. A. Stability of the sixth and seventh libration points in the photogravitational restricted circular three-body problem, *Pis'ma v Astron. Zh.*, 1976, vol. 2, pp. 174–175 (Russian).

- [23] Perezhogin A. A., Tureshbaev A. T. Stability of coplanar libration points in the photo-gravitational restricted three-body problem, *Sov. Astron.*, 1989, vol. 33, no. 4, pp. 445–448; see also: *Astron. Zh.*, 1989, vol. 66, no. 4, pp. 859–865.
- [24] Szebehely V. *Theory of orbits: The restricted problem of three bodies*, New York: Acad. Press, 1967.
- [25] Waters T. J., McInnes C. R. Solar sail dynamics in the three-body problem: Homoclinic paths of points and orbits, *Int. J. Non Linear Mech.*, 2008, vol. 43, no. 6, pp. 490–496.

Hill's curves and libration points in the low-thrust restricted circular three-body problem

Pavel S. Krasilnikov

Moscow Aviation Institute (National Research University)
Volokolamskoe sh. 4, GSP-3, A-80, Moscow, 125993, Russia
krasil06@rambler.ru

The plane circular restricted three-body problem is considered, where the massless body is a constant low-thrust spacecraft. It is assumed that the vector of low-thrust is directed along the Ox axis connecting the main bodies. The problem of plotting a family of one-parameter Hill's curves is investigated. The existence conditions of artificial triangular-type and collinear-type libration points are obtained. The values of the effective force function at libration points are investigated also. Six different topological types of the family of one-parameter Hill's curves are described. It is shown that these types differ in the number of critical values of the constant Jacobi integral and in the ordering of these values. For the Earth–Moon system, a family of one-parameter Hill's curves is plotted for each of the six types.

MSC 2010: 70F07, 70K42, 53A04

Keywords: restricted three-body problem, Hill's curves, libration points, constant low-thrust spacecraft

Received November 01, 2017, accepted December 08, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 543–556 (Russian)