УДК: 531.44, 517.928

MSC 2010: 70F40, 70K43, 70K65

Исследование динамики кусочно-линейного осциллятора с двумя степенями свободы

А. Е. Байков, Н. В. Ковалев

Исследуется движение кусочно-линейного осциллятора, представляющего собой два соединенных пружинами ящика на ленте конвейера, движущейся с постоянной скоростью. Уравнения движения усреднены в одном нерезонансном случае. Получен континуум инвариантных торов, существующих также в точной системе. Доказано притяжение (за конечное время) траекторий к семейству предельных торов, принадлежащему континууму инвариантных. Исследованы также зоны залипания, которые нельзя обнаружить методом усреднения.

Ключевые слова: уравнения с разрывной правой частью, кусочно-линейный осциллятор, метод усреднения, инвариантный тор, зона залипания

Получено 09 октября 2017 года

После доработки 30 ноября 2017 года

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

Байков Александр Евгеньевич

alexbaikov16@gmail.com

Ковалев Николай Владиславович

nick_scr@mail.ru

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4

Механическим системам с сухим трением посвящены монографии [1, 2], а математический аспект — монография [3]. В настоящей статье рассматривается система из двух соединенных пружинами ящиков на движущейся с постоянной скоростью ленте конвейера. Уравнения движения этой системы кусочно-линейны, поэтому легко локально решаются, однако анализ динамики затруднен из-за отсутствия глобального решения. Исследовать движения предлагается методом усреднения, также исследованы зоны залипания. Ранее эта механическая система была рассмотрена в [4] другими методами.

1. Система с одной степенью свободы

Система состоит из ящика, прикрепленного с двух сторон пружинами к стенам, на ленточном конвейере (рис. 1).

Рис. 1. Система с одной степенью свободы.

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид

$$M\ddot{X} + cX = -fgM \operatorname{sign}(\dot{X} - v), \quad (1.1)$$

где M — масса ящика, c — жесткость одной пружины, g — ускорение свободного падения, f — коэффициент сухого трения, v — скорость ленточного конвейера.

С помощью замены

$$\begin{cases} X = v\sqrt{\frac{M}{c}} x, \\ t = \sqrt{\frac{M}{c}} \tau \end{cases}$$

уравнение (1.1) обезразмеривается:

$$x'' + x = -\delta \operatorname{sign}(x' - 1),$$

где $\delta = \frac{fg}{v} \sqrt{\frac{M}{c}}$, или (в виде системы)

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - \delta \operatorname{sign}(y - 1). \end{cases} \quad (1.2)$$

Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi), \\ y = -\rho \sin(\varphi). \end{cases}$$

Тогда система (1.2) примет вид

$$\begin{cases} \rho' = \sin(\varphi)\delta \operatorname{sign}(-\rho \sin(\varphi) - 1), \\ \varphi' = 1 + \cos(\varphi)\delta \operatorname{sign}(-\rho \sin(\varphi) - 1). \end{cases} \quad (1.3)$$

Теперь усредним первое уравнение системы (1.3) по φ :

$$\overline{\rho'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta \sin(\varphi) \operatorname{sign}(-\rho \sin(\varphi) - 1) d\varphi = \begin{cases} -\frac{2\delta}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}}, & \text{если } \rho \geq 1, \\ 0, & \text{если } \rho < 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

Так как $\dot{\rho}$ всегда отрицательна для $\rho > 1$, то ρ стремится к особой точке $\rho = 1$. Рассчитаем время, за которое ρ достигнет 1. Из интеграла

$$\int_{\rho_0}^1 d\rho = - \int_0^{\tau_0} \frac{2\delta}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}} d\tau$$

имеем

$$\tau_0 = \frac{\pi}{\delta} \sqrt{\rho_0^2 - 1}.$$

2. Система с двумя степенями свободы

Исследуемая система состоит из двух соединенных пружиной ящиков на ленточном конвейере (рис. 2). Кроме того, каждый из ящиков соединен пружиной с ближайшей стеной. Жесткости всех пружин равны.

Рис. 2. Изучаемая система.

Уравнения движения изучаемой системы имеют вид

$$\begin{cases} M\ddot{X}_1 + cX_1 - c(X_2 - X_1) = -fgM \operatorname{sign}(\dot{X}_1 - v), \\ M\ddot{X}_2 + cX_2 - c(X_1 - X_2) = -fgM \operatorname{sign}(\dot{X}_2 - v), \end{cases} \quad (2.1)$$

где M — масса одного ящика, c — жесткость пружин, g — ускорение свободного падения, f — коэффициент сухого трения, v — скорость движения ленточного конвейера.

Обезразмерим систему (2.1), сделав замену

$$\begin{cases} X_1 = v\sqrt{\frac{M}{c}}x_1, \\ X_2 = v\sqrt{\frac{M}{c}}x_2, \\ t = \sqrt{\frac{M}{c}}\tau. \end{cases} \quad (2.2)$$

После обезрамзеривания система (2.1) примет вид

$$\begin{cases} x_1'' + 2x_1 - x_2 = -\delta \operatorname{sign}(x_1' - 1), \\ x_2'' + 2x_2 - x_1 = -\delta \operatorname{sign}(x_2' - 1), \end{cases} \quad (2.3)$$

где $\delta = \frac{fg}{v} \sqrt{\frac{M}{c}}$. Преобразование к главным координатам имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2, \\ x_2 = z_1 + z_2, \end{cases} \quad (2.4)$$

а система (2.3) в главных координатах преобразуется к виду

$$\begin{cases} z_1'' = -z_1 - \frac{\delta}{2}(\operatorname{sign}(z_1' - z_2' - 1) + \operatorname{sign}(z_1' + z_2' - 1)), \\ z_2'' = -3z_2 - \frac{\delta}{2}(\operatorname{sign}(z_1' + z_2' - 1) - \operatorname{sign}(z_1' - z_2' - 1)). \end{cases} \quad (2.5)$$

Сделаем также преобразование к быстрым и медленным переменным

$$\begin{cases} z_1 = \rho_1 \cos \varphi_1, \\ z_1' = -\rho_1 \sin \varphi_1, \\ z_2 = \rho_2 \cos \varphi_2, \\ z_2' = -\sqrt{3}\rho_2 \sin \varphi_2 \end{cases} \quad (2.6)$$

и получим двухчастотную систему с двумя медленными переменными ρ_1 и ρ_2 вида

$$\begin{cases} \rho_1' = \frac{\delta \sin \varphi_1}{2} P_1, \\ \varphi_1' = 1 + \frac{\delta \cos \varphi_1}{2\rho_1} P_1, \\ \rho_2' = \frac{\delta \sin \varphi_2}{2\sqrt{3}} P_2, \\ \varphi_2' = \sqrt{3} + \frac{\delta \cos \varphi_2}{2\sqrt{3}\rho_2} P_2, \end{cases} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{cases} P_1 = \operatorname{sign}(-\rho_1 \sin \varphi_1 + \sqrt{3}\rho_2 \sin \varphi_2 - 1) + \operatorname{sign}(-\rho_1 \sin \varphi_1 - \sqrt{3}\rho_2 \sin \varphi_2 - 1), \\ P_2 = \operatorname{sign}(-\rho_1 \sin \varphi_1 - \sqrt{3}\rho_2 \sin \varphi_2 - 1) - \operatorname{sign}(-\rho_1 \sin \varphi_1 + \sqrt{3}\rho_2 \sin \varphi_2 - 1). \end{cases}$$

3. Усредненная система

Усредним уравнения для ρ_1, ρ_2 системы (2.7) по φ_1, φ_2 (резонанса нет):

$$\begin{cases} \overline{\rho_1'} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta \sin \varphi_1}{2} P_1 d\varphi_1 d\varphi_2, \\ \overline{\rho_2'} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta \sin \varphi_2}{2\sqrt{3}} P_2 d\varphi_1 d\varphi_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Функции P_1, P_2 всегда отрицательные

$$\forall \rho_1, \rho_2 \geq 0: \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 \leq 1. \quad (3.2)$$

Тогда при условии (3.2) уравнения системы (3.1) всегда нулевые.

Правые части системы (3.1) всегда отрицательные

$$\forall \rho_1, \rho_2 \geq 0: \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 > 1. \quad (3.3)$$

Для доказательства рассмотрим первое уравнение системы (3.1):

$$\overline{\rho_1'} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta \sin \varphi_1}{2} P_1 d\varphi_1 d\varphi_2.$$

1) $\varphi_1 \in [0; \pi]$. Имеем

$$0 \leq \sin \varphi_1 \leq 1,$$

$$P_1 = \begin{cases} -2, & \text{при } \forall \varphi_2 \in \Omega_1, \forall \rho_1, \rho_2 \geq 0: \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 > 1, \\ 0, & \text{при } \forall \varphi_2 \in [0; 2\pi] \setminus \Omega_1, \forall \rho_1, \rho_2 \geq 0: \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 > 1, \end{cases}$$

где Ω_1

$$\begin{aligned} & \left(-\arcsin \frac{1 + \rho_1 \sin \varphi_1}{\sqrt{3}\rho_2}; \arcsin \frac{1 + \rho_1 \sin \varphi_1}{\sqrt{3}\rho_2} \right) \cup \\ & \cup \left(\pi - \arcsin \frac{1 + \rho_1 \sin \varphi_1}{\sqrt{3}\rho_2}; \pi + \arcsin \frac{1 + \rho_1 \sin \varphi_1}{\sqrt{3}\rho_2} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Если $\frac{1 + \rho_1 \sin \varphi_1}{\sqrt{3}\rho_2} > 1$, то $\Omega_1 = [0; 2\pi]$.

2) $\varphi_1 \in \left(\pi; \pi + \arcsin \frac{1}{\rho_1} \right)$ или $\varphi_1 \in \left(-\arcsin \frac{1}{\rho_1}; 0 \right)$. Если $\frac{1}{\rho_1} > 1$, то случай 2) справедлив при $\varphi_1 \in (\pi; 2\pi)$:

$$-\frac{1}{\rho_1} < \sin \varphi_1 < 0,$$

$$P_1 = \begin{cases} -2, & \text{при } \forall \varphi_2 \in \Omega_2, \forall \rho_1, \rho_2 \geq 0: \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 > 1, \\ 0, & \text{при } \forall \varphi_2 \in [0; 2\pi] \setminus \Omega_2, \forall \rho_1, \rho_2 \geq 0: \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 > 1, \end{cases}$$

где Ω_2 определяется формулой (3.4). Если $\frac{1 + \rho_1 \sin \varphi_1}{\sqrt{3}\rho_2} > 1$, то $\Omega_2 = [0; 2\pi]$.

3) $\varphi_1 \in \left(\pi + \arcsin \frac{1}{\rho_1}; 2\pi - \arcsin \frac{1}{\rho_1} \right)$. Если $\frac{1}{\rho_1} > 1$, то случай 3) места не имеет:

$$-1 \leq \sin \varphi_1 \leq -\frac{1}{\rho_1},$$

$$P_1 = \begin{cases} 2, & \text{при } \forall \varphi_2 \in \Omega_3, \forall \rho_1, \rho_2 \geq 0: \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 > 1, \\ 0, & \text{при } \forall \varphi_2 \in [0; 2\pi] \setminus \Omega_3, \forall \rho_1, \rho_2 \geq 0: \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 > 1, \end{cases}$$

где Ω_3 определяется формулой (3.4). Если $\frac{1 + \rho_1 \sin \varphi_1}{\sqrt{3}\rho_2} > 1$, то $\Omega_3 = [0; 2\pi]$.

Функция $\sin \varphi_1 P_1$ положительная только в случае 2). Тогда рассмотрим обратный случай: $\varphi_1 \in \left(\pi - \arcsin \frac{1}{\rho_1}; \pi\right)$ или $\varphi_1 \in \left(0; \arcsin \frac{1}{\rho_1}\right)$. Если $\frac{1}{\rho_1} > 1$, то случай 2) справедлив при $\varphi_1 \in (0; \pi)$:

$$0 < \sin \varphi_1 < \frac{1}{\rho_1},$$

$$P_1 = \begin{cases} -2, & \text{при } \forall \varphi_2 \in \Omega, \forall \rho_1, \rho_2 \geq 0: \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 > 1, \\ 0, & \text{при } \forall \varphi_2 \in [0; 2\pi] \setminus \Omega, \forall \rho_1, \rho_2 \geq 0: \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 > 1, \end{cases}$$

где Ω определяется формулой (3.4). Если $\frac{1 + \rho_1 \sin \varphi_1}{\sqrt{3}\rho_2} > 1$, то $\Omega = [0; 2\pi]$.

Из формулы (3.4) следует, что $\Omega \geq \Omega_2$. Тогда правая часть первого уравнения системы (3.1) всегда отрицательна при условии (3.3). Рассуждения для второго уравнения системы (3.1) аналогичны.

Таким образом, все траектории усредненной системы при условии (3.3) стремятся к множеству точек $\rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 = 1$. Вычислим, за какое время ρ_1 стремится к 1 на оси ρ_1 . Уравнения системы (3.1) на оси $0\rho_1$:

$$\begin{cases} \overline{\rho_1'} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta \sin \varphi_1 (-\rho_1 \sin \varphi_1 - 1) d\varphi_1 d\varphi_2, \\ \overline{\rho_2'} = 0. \end{cases}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta \sin \varphi_1 \operatorname{sign}(-\rho_1 \sin \varphi_1 - 1) d\varphi_1 d\varphi_2 = \begin{cases} -\frac{2\delta}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{\rho_1^2}}, & \text{если } \rho_1 \geq 1, \\ 0, & \text{если } \rho_1 < 1. \end{cases}$$

Вычисления

$$\int_{\rho_{10}}^1 d\rho_1 = - \int_0^{\tau_0} \frac{2\delta}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{\rho_1^2}} d\tau$$

дают конечное время

$$\tau_0 = \frac{\pi}{\delta} \sqrt{\rho_{10}^2 - 1}.$$

Аналогичные рассуждения для оси ρ_2 .

Таким образом, мы определили инвариантные торы

$$\forall \rho_1, \rho_2 \geq 0: \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 < 1 \quad (3.5)$$

и предельные торы

$$\forall \rho_1, \rho_2 \geq 0: \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 = 1 \quad (3.6)$$

усредненной системы (3.1).

4. Инвариантные торы основной системы

Система (2.1) находится в равновесии при $\dot{X}_1 = 0$, $\dot{X}_2 = 0$:

$$\begin{cases} -2cX_1^* + cX_2^* + fgM = 0, \\ -2cX_2^* + cX_1^* + fgM = 0, \\ X_1^* = X_2^* = \frac{fgM}{c}; \end{cases}$$

в безразмерных координатах (2.2):

$$x_1^* = x_2^* = \delta. \quad (4.1)$$

Рассмотрим, что у основной системы (2.1) находится на месте инвариантных торов (3.5) усредненной системы (3.1).

Условия нахождения на инвариантных торах:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 < v, \\ \dot{X}_2 < v. \end{cases} \quad (4.2)$$

Тогда система (2.1) принимает вид

$$\begin{cases} M\ddot{X}_1 + cX_1 - c(X_2 - X_1) = fgM, \\ M\ddot{X}_2 + cX_2 - c(X_1 - X_2) = fgM. \end{cases} \quad (4.3)$$

Как и в пункте 1, с помощью замен (2.2), (2.4) переходим от системы (4.3) к линейной невозмущенной системе:

$$\begin{cases} z_1'' = -z_1 + \delta, \\ z_2'' = -3z_2. \end{cases} \quad (4.4)$$

Условия (4.2) в координатах (z_1, z_2) :

$$\begin{cases} z_1' - z_2' < 1, \\ z_1' + z_2' < 1. \end{cases}$$

Сделаем еще одну замену переменных:

$$\begin{cases} z_1 = \rho_1 \cos(\varphi_1) + \delta, \\ z_1' = -\rho_1 \sin(\varphi_1), \\ z_2 = \rho_2 \cos(\varphi_2), \\ z_2' = -\sqrt{3}\rho_2 \sin(\varphi_2). \end{cases} \quad (4.5)$$

Тогда система (4.4) имеет вид

$$\begin{cases} \rho_1' = 0, \\ \varphi_1' = 1, \\ \rho_2' = 0, \\ \varphi_2' = \sqrt{3}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Условия (4.2) в новых переменных:

$$\begin{cases} -\rho_1 \sin(\varphi_1) + \sqrt{3}\rho_2 \sin(\varphi_2) < 1, \\ -\rho_1 \sin(\varphi_1) - \sqrt{3}\rho_2 \sin(\varphi_2) < 1. \end{cases} \quad (4.7)$$

Величины $\sin(\varphi_1)$ и $\sin(\varphi_2)$ принимают значения на всем интервале $[-1; 1]$, поэтому условия (4.7) всегда удовлетворяются при

$$\forall \rho_1, \rho_2 \geq 0: \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 < 1. \quad (4.8)$$

Таким образом, система (2.1) и усредненная система (3.1) имеют совпадающие множества инвариантных торов.

5. Зона залипания

Определим зону залипания первого ящика, добавив к системе (2.1) условия $X_1 = vt + X_{10}$, $\dot{X}_1 = v$, $\ddot{X}_1 = 0$. Получившаяся система имеет вид

$$\begin{cases} -2cX_1 + cX_2 + F_1 = 0, \\ M\ddot{X}_2 + cX_2 - c(X_1 - X_2) = -fgM \operatorname{sign}(\dot{X}_2 - v), \\ |F_1| \leq fgM, \end{cases} \quad (5.1)$$

где F_1 есть сила трения покоя.

Из системы (5.1) получаем условия залипания первого ящика:

$$\dot{X}_1 = v, \quad |2cX_1 - cX_2| \leq fgM;$$

в безразмерных координатах (2.1):

$$x'_1 = 1, \quad |2x_1 - x_2| \leq \delta. \quad (5.2)$$

Аналогично получаем условия залипания второго ящика:

$$x'_2 = 1, \quad |2x_2 - x_1| \leq \delta. \quad (5.3)$$

После замен (2.4), (4.5) условия (5.2), (5.3) примут вид

$$-\rho_1 \sin \varphi_1 + \sqrt{3}\rho_2 \sin \varphi_2 = 1, \quad |\rho_1 \cos \varphi_1 - 3\rho_2 \cos \varphi_2 + \delta| \leq \delta, \quad (5.4)$$

$$-\rho_1 \sin \varphi_1 - \sqrt{3}\rho_2 \sin \varphi_2 = 1, \quad |\rho_1 \cos \varphi_1 + 3\rho_2 \cos \varphi_2 + \delta| \leq \delta. \quad (5.5)$$

Рассмотрим условия (5.4) на предельных торах (3.6). Решая систему

$$\begin{cases} |\rho_1 \cos \varphi_1 - 3\rho_2 \cos \varphi_2 + \delta| \leq \delta, \\ -\rho_1 \sin \varphi_1 + \sqrt{3}\rho_2 \sin \varphi_2 = 1, \\ \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 = 1, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \\ \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \\ \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 = 1. \end{cases} \quad (5.6)$$

Аналогично для условий (5.5) получаем

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \\ \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}, \\ \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 = 1. \end{cases} \quad (5.7)$$

Из решений (5.6), (5.7) получаем, что каждый предельный тор касается многообразий разрыва в двух точках.

Теперь рассмотрим зону залипания за пределами инвариантных и предельных торов. Для этого рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} |\rho_1 \cos \varphi_1 - 3\rho_2 \cos \varphi_2 + \delta| \leq \delta, \\ -\rho_1 \sin \varphi_1 + \sqrt{3}\rho_2 \sin \varphi_2 = 1, \\ \rho_1 + \sqrt{3}\rho_2 > 1. \end{cases} \quad (5.8)$$

Построим бифуркационные кривые на основе решений следующих систем:

$$\begin{cases} \rho_1 \cos \varphi_1 - 3\rho_2 \cos \varphi_2 = 0, \\ -\rho_1 \sin \varphi_1 + \sqrt{3}\rho_2 \sin \varphi_2 = 1, \\ \operatorname{tg} \varphi_1 = \sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi_2, \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\begin{cases} \rho_1 \cos \varphi_1 - 3\rho_2 \cos \varphi_2 = -2\delta, \\ -\rho_1 \sin \varphi_1 + \sqrt{3}\rho_2 \sin \varphi_2 = 1, \\ \operatorname{tg} \varphi_1 = \sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi_2. \end{cases} \quad (5.10)$$

Решение системы (5.9) относительно φ_1, φ_2 :

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\arcsin \frac{3}{2\rho_1}, \\ \varphi_2 = -\arcsin \frac{1}{2\sqrt{3}\rho_2}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Подставляя это решение в первое уравнение системы (5.9), получаем уравнение для бифуркационной прямой:

$$\sqrt{4\rho_1^2 - 9} = \sqrt{36\rho_2^2 - 3}. \quad (5.12)$$

Решая систему (5.10) относительно ρ_1, ρ_2 , получаем уравнение для еще одной бифуркационной прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{2\delta \operatorname{tg} \varphi_1 - 3}{2 \sin \varphi_1}, \\ \rho_2 = \frac{2\delta \operatorname{tg} \varphi_1 - 1}{2 \operatorname{tg} \varphi_1} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1 + 3}{3}}, \\ \varphi_1 \in [0; 2\pi]. \end{cases} \quad (5.13)$$

Теперь изобразим полученные кривые в плоскости параметров (ρ_1, ρ_2) (рис. 3).

Рис. 3. Бифуркационные кривые и прямая предельных торов.

References

- [1] Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E. *Theory of oscillators*, Oxford: Pergamon Press, 1966.
- [2] Ivanov A. P. *Fundamentals of the theory of systems with friction*, Izhevsk: R & C Dynamics, Institute of Computer Science, 2011 (Russian).
- [3] Filippov A. F. *Differential equations with discontinuous righthand sides: Control systems*, Math. Appl., vol. 18, Dordrecht: Springer, 1988.
- [4] Pascal M., Stepanov S. Dynamics of coupled oscillators excited by dry friction, in *Proc. of the 9th Conf. on Dynamical Systems, Theory and Applications (Poland, Dec 17–20, 2007): Vol. 1*, Łódź: Left Grupa, 2008, pp. 355–362.

Investigation of the dynamics of a two-degrees-of-freedom piecewise linear oscillator

Alexander E. Baikov¹, Nikolay V. Kovalev²

^{1,2}Moscow Aviation Institute (National Research University)

Volokolamskoe sh. 4, Moscow, 125993, Russia

¹alexbaikov16@gmail.com, ²nick_scr@mail.ru

The motion of a piecewise linear oscillator is considered. It consists of two spring connected drawers on a conveyor belt moving at a constant speed. The equations of motion are averaged in one nonresonance case. A continuum of invariant tori is obtained that exists in the exact system. The attraction (in finite time) of the trajectories to the family of limit tori is proved (limit tori belong to the continuum of invariant tori). We also investigate zones of sticking, which cannot be detected by averaging.

MSC 2010: 70F40, 70K43, 70K65

Keywords: equations with discontinuities, piecewise linear oscillator, averaging method, invariant torus, sticking zone

Received October 09, 2017, accepted November 30, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 4, pp. 533–542 (Russian)