КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ. СТРАНИЦЫ ИСТОРИИ

УДК: 517.925.52, 517.938

MSC 2010: 37J40, 70H08, 70K43

К истории теории КАМ

М. Б. Севрюк

Перечислены наиболее важные направления развития и результаты теории КАМ после 1963 года и до конца XX века (без литературных ссылок, но с указанием авторов и времени получения результата).

Ключевые слова: теория КАМ, инвариантные торы

В 2000 году директор издательства ФАЗИС В. Б. Филиппов сообщил мне о своем замысле начать публикацию серии брошюр, рассказывающих об истории различных математических разделов и теорий. В частности, предполагалось выпустить брошюру, посвященную истории теории КАМ (Колмогорова–Арнольда–Мозера), то есть теории квазипериодических движений в неинтегрируемых динамических системах. Например, в эту брошюру должна была войти статья В. И. Арнольда «От суперпозиций до теории КАМ» (В. И. Арнольд, Избранное–60, М.: ФАЗИС, 1997, 727–740), освещающая начальный этап развития теории КАМ. По предложению Филиппова я подготовил для этой брошюры список наиболее важных направлений развития и результатов теории КАМ после 1963 года (то есть после знаменитых работ Арнольда «Малые знаменатели II» и «Малые знаменатели III» в УМН). К сожалению, идея Филиппова так и не была реализована. Составленный мной в 2000 году список приводится ниже без каких-либо существенных изменений (исправлены только отдельные мелкие неточности). Хотя со времени его написания прошло более полутора десятилетий, этот список, как мне кажется, по-прежнему может быть полезен изучающим теорию КАМ. В списке не упоминаются попытки доказать типичность диффузии Арнольда и оценки ее скорости сверху (теория Нехорошева), смежные оценки расщепления сепаратрис и теоремы о квазипериодической динамике, не связанные с существованием инвариантных торов. Конечно, список неизбежно несет на себе некоторую печать субъективности; кроме того, необходимо иметь в виду, что многие направления перекрываются. Фамилии авторов основных результатов в каждом пункте приведены в хронологическом порядке.

Получено и принято к печати 09 февраля 2016 года

Севрюк Михаил Борисович
sevryuk@mccme.ru

Институт энергетических проблем химической физики им. В. Л. Тальрозе РАН
119334, г. Москва, Ленинский проспект, д. 38, корп. 2

1) Определение минимальной гладкости возмущения, достаточной для сохранения инвариантных торов (H. Rüssmann, F. Takens, E. Zehnder, J. Pöschel, M. R. Herman, D. Salamon). Для случая сохраняющих площади отображений двумерного кольца достаточна гладкость C^3 (Эрман, 1986), в то время как для $C^{3-\delta}$ -возмущений с любым $\delta > 0$ существуют контрпримеры (Эрман, 1983; здесь под $C^{3-\delta}$ -отображениями понимаются отображения из соответствующего класса Гёльдера); отметим, что C^1 -контрпример был построен Такенсом еще в 1971 году. Для автономных гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений с n степенями свободы достаточно, чтобы возмущенный гамильтониан был класса $C^{2n+\delta}$ с любым $\delta > 0$ (Пёшель, 1980). Как показал Саламон в 1986 году, невозмущенный гамильтониан при этом также может быть лишь $C^{2n+\delta}$ -гладким.

2) Гладкость по Уитни канторовых семейств возмущенных инвариантных торов и, в частности, гладкая по Уитни зависимость возмущенных инвариантных торов от частот (В. Ф. Лазуткин, Н. В. Сванидзе, J. Pöschel, L. Chierchia, G. Gallavotti, H. W. Broer, G. B. Huitema, F. Takens, E. Valdinoci). Впервые дифференцируемость по Уитни канторовых семейств инвариантных торов была установлена Лазуткиным (для случая инвариантных кривых отображения двумерного кольца, которое обладает так называемым свойством пересечения, немного более слабым, чем свойство сохранения площадей) в 1972 году.

3) Определение наиболее слабых условий невырожденности, накладываемых на невозмущенную систему (H. Rüssmann, M. R. Herman, Ch.-Q. Cheng, Y.-S. Sun, J. Xu, J. You, Q. Qiu, М. Б. Севрюк, H. W. Broer, G. B. Huitema, F. Cong, Y. Li, Q. Zhou, D. Jin, Q. Huang). Оптимальное условие невырожденности в теореме Колмогорова (так называемое условие Рюссмана) следующее: образ невырожденного аналитического отображения частот не должен лежать ни в какой гиперплоскости, проходящей через нуль. Хотя этот результат был получен Рюссманом в 80-х годах, соответствующий «официальный» препринт появился лишь в 1998 году — уже после публикаций Чена–Суня (1994) и Севрюка (1995), содержащих полные доказательства, найденные независимо.

4) «Прямые доказательства», не использующие введенной Колмогоровым итерационной процедуры (ньютоновского типа) последовательных замен координат, а непосредственно устанавливающие сходимость соответствующих рядов теории возмущений — рядов Линдштедта — путем перегруппировки членов и диаграммных методов, подобных применяемым в квантовой теории поля и обобщающих технику компенсации резонансов Зигеля (L. H. Eliasson, G. Gallavotti, G. Gentile, V. Mastropietro, L. Chierchia, C. Falcolini, F. Bonetto, J. Bricmont, K. Gawędzki, A. Kupiainen). «Прямые доказательства» в теории КАМ были впервые анонсированы Элиассоном в 1987 году и подробно изложены в его препринте, появившемся в 1988 году, но опубликованном лишь в 1996 году.

5) «Неполномерная», или «маломерная», теория КАМ, относящаяся к инвариантным торам, размерность которых меньше числа степеней свободы n (В. К. Мельников, J. Moser, B. B. Lieberman, Ю. Н. Бибилов, S. M. Graff, E. Zehnder, P. Moson, L. H. Eliasson, J. Pöschel, H. Rüssmann, H. W. Broer, G. B. Huitema, F. Takens, L. Chierchia, C. Falcolini, М. Б. Севрюк, À. Jorba, J. Villanueva, J. Xu, J. Bourgain, J. You, H. H. de Jong, D. Huang, Z. Liu и другие). При этом либо рассматриваются возмущения системы, имеющей гладкую инвариантную $2m$ -мерную поверхность, расслоенную на инвариантные m -мерные торы с $m < n$, либо для $m < n$ строятся инвариантные m -мерные торы в окрестности положения равновесия. Начало неполномерной теории КАМ положила работа Мельникова 1965 года. Фундаментальные результаты о сохранении гиперболических инвариантных торов были получены Бибиловым (1973) и Граффом (1974), а эллиптических — Элиассоном (1988) и Пёшелем (1989). Недавно в рамках маломерной теории КАМ были также построены и исследованы

канторовы семейства инвариантных ν -мерных торов в окрестности семейств инвариантных m -мерных торов для любых $m < \nu \leq n$ (Севрюк, 1996; Джорба–Вильянуэва, 1997). Все инвариантные торы в неполномерной теории КАМ *изотропны*.

6) Сохранение инвариантных торов, размерность которых больше числа степеней свободы n (И. О. Парасюк, M. R. Herman, F. Cong, Y. Li). Пионерской работой здесь является статья Парасюка 1984 года. Согласно теореме Эрмана об изотропности колмогоровских торов (1988), инвариантные M -мерные торы с $M > n$, движение по которым квазипериодично, возможны только у гамильтоновых систем с неточной симплектической структурой.

«Классические» теоремы теории КАМ о сохранении инвариантных торов, размерность которых равна числу степеней свободы n , опровергают эргодическую гипотезу («движение на каждой гиперповерхности уровня энергии в гамильтоновой системе общего положения эргодично»), а для $n = 2$ — и квазиэргодическую гипотезу («на каждой гиперповерхности уровня энергии в гамильтоновой системе общего положения есть всюду плотная траектория»). В то же время из теорем о сохранении инвариантных торов размерности больше n вытекает, что квазиэргодическая гипотеза неверна для любого n (Эрман, 1992). При этом во всех случаях существует открытое множество гамильтоновых систем, для которых поток не обладает соответствующим свойством *ни на какой* (а не просто не на каждой) гиперповерхности уровня энергии. Кроме того, теоремы о сохранении инвариантных торов размерности больше n опровергают лемму о замыкании (об аппроксимации рекуррентных траекторий замкнутыми) для достаточно гладких гамильтоновых систем в любой размерности, гипотезу Пуанкаре («периодические движения в гамильтоновой системе общего положения всюду плотны») в любой размерности и гипотезу Песина (о бездивергентных диффеоморфизмах с нулевыми показателями Ляпунова) в любой размерности (эти наблюдения также принадлежат Эрману).

Все инвариантные торы в теории Парасюка–Эрмана *коизотропны*.

7) Теория КАМ для инвариантных торов, не являющихся ни изотропными, ни коизотропными (Q. Huang, F. Cong, Y. Li, 2000).

8) Оценки щелей между возмущенными инвариантными торами и оценки степени деформации торов. При обычных условиях невырожденности мера множества разрушающихся торов и деформация сохраняющихся торов в теореме Колмогорова являются величинами порядка $\sqrt{\varepsilon}$, где $\varepsilon \geq 0$ — параметр возмущения (А. И. Нейштадт, 1981). Аналогичные оценки справедливы и для дискретного аналога теоремы Колмогорова, относящегося к симплектическим диффеоморфизмам (Н. В. Сванидзе, 1980). В то же время в аналитической системе с двумя степенями свободы при наличии собственного вырождения мера объединения разрушающихся торов экспоненциально мала по ε (Нейштадт, 1981). Степенную по r оценку меры стохастического множества (дополнения к колмогоровскому) в r -окрестности эллиптического положения равновесия вывел J. Pöschel (1982), а экспоненциальную (при условии диофантовости набора собственных частот и аналитичности системы) получили A. Delshams и P. Gutiérrez (1996). Экспоненциальное сгущение инвариантных торов вокруг инвариантного n -мерного тора аналитической системы с n степенями свободы установили A. Giorgilli и A. Morbidelli (1995), а вокруг инвариантных торов размерностей $m < n$ — À. Jorba и J. Villanueva (1997).

9) Разрушение резонансных инвариантных торов вполне интегрируемых систем (Д. В. Трепщев, L. H. Eliasson, Ch.-Q. Cheng, Sh. Wang, М. Руднев, S. Wiggins, F. Cong, T. Küpper, Y. Li, J. You, L. Niederman, E. Valdinoci). Здесь речь идет о распаде инвариантного n -мерного тора вполне интегрируемой системы, частоты движения на котором удовлетворяют k линейно независимым резонансным соотношениям, на конечный набор инвариантных

$(n - k)$ -мерных торов возмущенной системы. Гиперболические $(n - k)$ -мерные торы в этой задаче были построены Трепцевым в 1989 году. Чен и Ван в 1999 году доказали существование и негиперболических — в частности, эллиптических — $(n - k)$ -мерных торов.

10) Аналитическое продолжение инвариантных торов по параметру (А. Д. Брюно). Теория Брюно изучает аналитические инвариантные поверхности, проходящие через инвариантный тор в аналитических системах. Эти поверхности состоят из инвариантных торов и их притягивающих и отталкивающих многообразий («усов»).

11) Приложения теории КАМ к нахождению коротковолновой асимптотики собственных значений и собственных функций операторов Шрёдингера, Лапласа и Бельтрами – Лапласа (В. Ф. Лазуткин).

12) Эквивалентность теорем об инвариантных торах для (неавтономных) потоков и для диффеоморфизмов (R. Douady, 1982) и смежные результаты о вложимости аналитического диффеоморфизма в аналитический поток (С. И. Трифонов, С. Б. Куксин, J. Pöschel, А. В. Пронин, Д. В. Трепцев, À. Haro).

13) Теория КАМ для негамильтоновых систем. Теория инвариантных торов КАМ, которая обычно формулируется для гамильтоновых динамических систем (гамильтоновых потоков и симплектических диффеоморфизмов), переносится на обратимые системы (J. Moser, Ю. Н. Бибилов, В. А. Плисс, J. Scheurle, J. Pöschel, И. О. Парасюк, В. И. Арнольд, P. Moson, М. Б. Севрюк, G. B. Huitema, W. Pluschke, G. R. W. Quispel, H. W. Broer, М. В. Матвеев, В. Wei и другие), бездивергентные негамильтоновы системы (Брур, Хайтема, F. Takens, Ch.-Q. Cheng, Y.-S. Sun, Zh. Xia) и даже системы общего типа (Брур, Хайтема, Такенс; в этом случае для получения результатов типа КАМ нужна зависимость системы от внешних параметров). В частности, обратимая теория КАМ, основанная независимо Мозером в 1965 году и Бибиловым – Плиссом в 1967 году, оказывается почти полностью параллельна гамильтоновой.

14) Так называемая теория квазипериодических бифуркаций (quasi-periodic bifurcation theory), рассматривающая бифуркации канторовых семейств инвариантных торов с квазипериодической динамикой. Эта теория к настоящему времени развита в основном для систем общего типа (B. L. J. Braaksma, H. W. Broer, G. B. Huitema, F. O. O. Wagener, F. Takens), но имеются также результаты для гамильтоновых систем (H. Hanßmann) и отчасти для обратимых (J. Scheurle, B. Wei, а также М. Б. Севрюк, A. Lahiri, A. Bhowal, T. K. Roy).

15) Определение пороговой величины возмущения, выше которой большинство инвариантных торов разрушаются (J. M. Greene, R. S. MacKay, A. Celletti, L. Chierchia, C. Falcolini, A. Porzio, C. Froeschlé и другие), и описание сценария разрушения тора с данным набором частот при росте возмущения (многие авторы: C. Chandre, M. Govin, H. R. Jauslin, H. Koch, ...), главным образом в частном случае инвариантных кривых сохраняющего площади отображения двумерного кольца. Как правило, пороговое возмущение находится численно или путем комбинации компьютерных расчетов и «аналитических» рассуждений (основанных прежде всего на так называемом методе ренорм-группы).

16) Теория Обри – Мазера, изучающая так называемые кантороторы — инвариантные подмножества канторова типа в гамильтоновых системах, удовлетворяющие (наряду с обычными гладкими инвариантными торами) так называемому вариационному принципу Персиваля (1979) и являющиеся аналогами гладких инвариантных торов для ненормально соизмеримых частот или для систем, далеких от интегрируемых (I. C. Percival же предложил и сам термин «канторотор» — “cantorus”). Эта теория развита главным образом для случая двух степеней свободы (J. N. Mather, S. Aubry, P. Y. Le Daeron, A. Chenciner, P. Le Calvez, G. Forni и другие). Частичные многомерные обобщения получили V. Bangert,

Мазер, А. Б. Каток, А. Fathi, W. E и другие. Sh.-N. Chow и M.-L. Pei (1995) перенесли теорию Обри–Мазера на обратимые системы.

17) Бесконечномерная теория КАМ и, в частности, теория КАМ для гамильтоновых дифференциальных уравнений с частными производными (M. Vittot, J. Blissard, J. Frhlich, T. C. Spencer, C. E. Wayne, С. Б. Куксин, J. Pschel, H. Rssmann, Р. Ф. Бикбаев, W. Craig, J. Bourgain, L. Chierchia, P. Perfetti, А. И. Бобенко, J. Xu, Q. Qiu, J. You). Существует два варианта теорем типа КАМ для систем с бесконечномерным фазовым пространством: о конечномерных инвариантных торах (первые результаты здесь принадлежат Куксину, 1987) и о бесконечномерных инвариантных торах (в этом направлении первые результаты получили Витто–Беллиссар, 1985, и Фрлих–Спенсер–Уйн, 1986). Доказан также ряд теорем типа КАМ для бесконечномерных *обратимых* систем (G. Iooss, J. E. Los, 1990, и X. Yuan, 2000).

18) Обратная теория КАМ, гарантирующая при тех или иных условиях отсутствие инвариантных торов в данной области фазового пространства данной системы (J. N. Mather, R. S. MacKay, I. C. Percival, M. R. Herman, I. Jungreis, J. D. Meiss, J. Stark, G. Forni, М. Б. Сеvрюк, . Haro, U. Bessi).

Я. Г. Синай в докладе на заседании Московского математического общества 7 сентября 1999 года отметил следующие три актуальные задачи теории динамических систем, выросшие из теории КАМ (ниже они формулируются для простейшего случая сохраняющих площади отображений двумерного кольца):

i) Описать иерархию островов фазовых колебаний в стохастических слоях (в частности, найти соответствующую масштабно-инвариантную структуру).

ii) Описать кривые, ограничивающие эти острова (согласно некоторым результатам рмана такие кривые не могут быть гладкими). Разработать технику построения негладких (но непрерывных) инвариантных кривых. Объяснить максимальную устойчивость инвариантных кривых, число вращения которых — золотое сечение.

iii) Описать динамику в стохастических слоях. Описать системы с самыми слабыми условиями стохастичности.

Более общая задача, сформулированная Синаем: объяснить, почему почти-периодическая динамика — единственный устойчивый тип поведения динамических систем.

On the history of KAM theory

Mikhail B. Sevryuk

V. L. Talroze Institute of Energy Problems of Chemical Physics
of the Russian Academy of Sciences
Leninskii prospect 38, Building 2, Moscow 119334, Russia
sevryuk@mccme.ru

We list the most important directions of the development and results of KAM theory during the period after 1963 and up to the end of the XXth century. No references are given, but the authors and years of the results are pointed out.

MSC 2010: 37J40, 70H08, 70K43

Keywords: KAM theory, invariant tori

Received and accepted February 09, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 2, pp. 289–293 (Russian)