ПЕРЕВОДНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.9, 531.36

MSC 2010: 34C15, 34C28, 34C46, 37C55, 37C70, 37D45, 70K43

Странные нехаотические автоколебания в системе механических ротаторов*

А. Ю. Жалнин, С. П. Кузнецов

Исследуются странные нехаотические автоколебания в диссипативной системе, состоящей из трех механических ротаторов, возбуждаемых постоянным вращательным моментом силы, приложенной к одному из них. Вынуждающая внешняя сила не является колебательной. Несоизмеримые частоты в колебательно-вращательной динамике системы возникают благодаря иррациональному соотношению диаметров задействованных элементов. Показано, что, при выходе системы из положения устойчивого равновесия, в ней могут возникать двух- и трехчастотные квазипериодические, хаотические, а также странные нехаотические автоколебания. Результаты работы подтверждаются численным расчетом ляпуновских показателей, фрактальных размерностей, спектральным анализом, а также специальными методами диагностики существования странной нехаотической динамики: методом рациональных аппроксимаций и анализом фазовой чувствительности аттрактора.

Ключевые слова: автономная динамическая система, механические ротаторы, квазипериодические колебания, странный нехаотический аттрактор, хаос

*Перевод статьи “Autonomous Strange Nonchaotic Oscillations in a System of Mechanical Rotators”, опубликованной в журнале Regular and Chaotic Dynamics, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 210–225.

Получено 31 марта 2017 года

После доработки 18 апреля 2017 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант No. 15-12-20035) в части построения и теоретического анализа механической системы (С. П. Кузнецов) и при поддержке РФФИ (грант No. 16-02-00135) в части численных характеристик странных аттракторов и анализа пространства параметров модели (А. Ю. Жалнин).

Жалнин Алексей Юрьевич

Jalnine@rambler.ru

Саратовский филиал ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН

410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

Кузнецов Сергей Петрович

spkuz@yandex.ru

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

1. Введение

Странный нехаотический аттрактор (СНА) представляет собой один из фундаментальных видов аттракторов динамических систем, сочетающий в себе противоречивые свойства порядка и хаоса [1]. Как «странный» аттрактор, он обладает негладкой, фракталоподобной геометрической структурой [2, 3] и сингулярно-непрерывным спектром [4–6]; при этом у него отсутствует экспоненциальное разбегание близких траекторий и нет положительных ляпуновских показателей, что свидетельствует о его нехаотической природе. СНА впервые был описан в 1984 году (см. [7]), и с тех пор такие аттракторы подробно исследовались теоретически и численно [8–21], а также наблюдались экспериментально [22–27] в нелинейных системах, находящихся под квазипериодическим внешним воздействием (например, под действием суперпозиции двух гармонических сигналов с фиксированным иррациональным соотношением частот). С другой стороны, попытки наблюдать странные нехаотические автоколебания, в которых несоизмеримые составляющие частоты были бы обусловлены собственной внутренней динамикой системы, без квазипериодического внешнего воздействия, успешными не были [28–30]. Таким образом, вопрос о реализуемости СНА в автономных системах по-прежнему остается открытым.

Первый пример автоколебательной диссипативной системы механической природы, демонстрирующей странные нехаотические автоколебания, возникающие благодаря постоянной во времени приложенной силе, был представлен в нашей работе [31]. Модельная система состоит из трех дисков, закрепленных в вертикальной плоскости. Диски взаимодействуют между собой посредством фрикционных и диссипативных связей. Движение в системе обеспечивается постоянным, не зависящим от времени моментом силы, приложенным к одному из дисков. Поскольку внешняя сила не является осциллирующей, то систему следует рассматривать как автономную. Компоненты колебаний с несоизмеримыми собственными частотами возникают благодаря иррациональному соотношению диаметров вовлеченных вращающихся элементов. Вдобавление, один из дисков при вращении испытывает вязкое трение, пропорциональное угловой скорости, так что система является диссипативной и обладает аттракторами в фазовом пространстве. Было показано, что, при выходе системы из состояния устойчивого равновесия, в ней могут возникать двух- и трехчастотные квазипериодические, хаотические и странные нехаотические колебательно-вращательные движения.

В настоящей работе более подробно развиваются результаты, впервые представленные в статье [31]. Проведено детальное теоретическое и численное исследование как полной 4-мерной системы уравнений механической системы, так и ее укороченной (3-мерной) математической модели. Численное исследование включает в себя расчет полного спектра ляпуновских показателей, фрактальных размерностей и показателей фазовой чувствительности странных нехаотических аттракторов, анализ структуры сингулярно-непрерывного спектра колебаний. Представлены карты динамических режимов в различных сечениях пространства параметров модельной системы и графики зависимостей ляпуновских показателей от управляющих параметров. На основе этих результатов исследованы механизмы динамических переходов между режимами в пространстве параметров, продемонстрирована типичность различных режимов колебаний в соответствующих областях пространства параметров. Полученные результаты проливают новый свет на проблему существования СНА в автономных динамических системах.

2. Механическая система и ее динамическая модель

Рассмотрим систему в виде установленных вертикально дисков 1, 2, 3, два из которых, 1 и 3, соосны и испытывают взаимное вязкое трение, пропорциональное относительной угловой скорости (см. рис. 1). Движение системы обеспечивается постоянным, не изменяющимся во времени моментом силы, приложенным к диску 1, который соприкасается краем с диском 2, так что имеет место фрикционная передача вращения без проскальзывания. Кроме того, диск 1 испытывает при вращении вязкое трение, пропорциональное его угловой скорости. Для простоты будем считать, что инерционные свойства системы полностью обеспечиваются точечными массами m_1 , m_2 и m_3 , которые закреплены на дисках на расстояниях, соответственно, l_1 , l_2 и l_3 от оси. По существу, это система из маятников с наложенной механической связью. Отношение радиусов дисков 1 и 2, связанных фрикционной передачей, зададим иррациональным числом: $\rho = r_1/r_2 = (\sqrt{5} + 1)/2$. Условие отсутствия проскальзывания при вращении дисков выражается соотношением на углы поворота $\theta_2 = \rho\theta_1 + u$ и на угловые скорости $\dot{\theta}_2 = \rho\dot{\theta}_1$. Учитывая это, можно записать функцию Лагранжа системы, как зависящую только от угловых координат $\theta_{1,3}$ и скоростей $\dot{\theta}_{1,3}$:

$$L = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\rho^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_3l_3^2\dot{\theta}_3^2 + m_1l_1g \cos \theta_1 + m_2l_2g \cos (\rho\theta_1 + u) + m_3l_3g \cos \theta_3. \quad (2.1)$$

Вводя диссипацию с помощью функции Рэлея

$$R = \frac{1}{2}\gamma_0(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3)^2 + \frac{1}{2}\beta_0\dot{\theta}_1^2 - M_0\dot{\theta}_1, \quad (2.2)$$

получаем уравнения движения в виде [32]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_i}, \quad i = 1, 3, \quad (2.3)$$

или

$$\begin{aligned} (m_1l_1^2 + m_2l_2^2\rho^2)\ddot{\theta}_1 &= -m_1l_1g \sin \theta_1 - m_2l_2g\rho \sin (\rho\theta_1 + u) + \gamma_0\dot{\theta}_3 - (\beta_0 + \gamma_0)\dot{\theta}_1 + M_0, \\ m_3l_3^2\ddot{\theta}_3 &= -m_3l_3g \sin \theta_3 + \gamma_0(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рис. 1. Схематическое изображение механической системы, в которой возможна реализация США.

Вводя обозначения $\theta = \theta_1$, $\varphi = \theta_3$, а также безразмерное время $\tau = t\sqrt{m_1 l_1 g / (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 \rho^2)}$ и безразмерные параметры

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\gamma_0}{\sqrt{m_1 l_1 g (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 \rho^2)}}, & \beta &= \frac{\beta_0}{\sqrt{m_1 l_1 g (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 \rho^2)}}, \\ \lambda_2 &= \frac{m_2 l_2}{m_1 l_1 \rho}, & \lambda_3 &= \frac{m_3 l_3}{m_1 l_1 \rho}, & \mu &= \frac{m_3 l_3^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 \rho^2}, & M &= \frac{M_0}{m_1 l_1 g}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\sin \theta - \lambda_2 \sin(\rho\theta + u) + \gamma\dot{\varphi} - (\beta + \gamma)\dot{\theta} + M, \\ \mu\ddot{\varphi} &= -\lambda_3 \sin \varphi + \gamma(\dot{\theta} - \dot{\varphi}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

При условии $\mu \ll 1$ можно редуцировать систему (2.6) и использовать ее приближенное описание следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -\sin \theta - \lambda_2 \sin(\rho\theta + u) - \lambda_3 \sin \varphi - \beta\omega + M, \\ \dot{\varphi} &= -\lambda_3 \gamma^{-1} \sin \varphi + \omega. \end{aligned} \quad (2.7)$$

3. Аттракторы редуцированной системы и их характеристики

Будем исследовать систему (2.7), зафиксировав значения $\lambda_3 = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\rho = (\sqrt{5} + 1)/2$ и варьируя параметры λ_2 и M .

На рисунке 2 приведены примеры аттракторов системы (2.7) в сечении Пуанкаре, выполняемом стробоскопически в моменты приращения фазовой переменной θ на 2π , а именно: $\theta_n = \theta_0 + 2\pi n$, $n = 1, \dots, 10^6$, при $\theta_0 = 0.0$. В первой колонке представлены сечения аттракторов в координатах $(\omega_n, \dot{\omega}_n)$, а во второй колонке — в координатах (ξ_n, ω_n) , где $\xi_n = \rho\theta_n \pmod{2\pi}$.

Аттрактор на рисунке 2а представляет собой двухчастотный тор, и его сечение имеет вид гладкой замкнутой инвариантной кривой. Объект, приведенный на рисунке 2б, — трехчастотный тор, сечение которого порождает гладкую двумерную поверхность. Аттракторы на рисунке 2с, д являются странными, и для их идентификации необходим расчет динамических и метрических характеристик (показатели Ляпунова, показатели фазовой чувствительности, фрактальные размерности).

Расчет ляпуновских показателей выполнялся в соответствии с алгоритмом Бенетти-на [33], с привлечением уравнений системы (2.7), линеаризованных вблизи опорной траектории:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}} &= \tilde{\omega}, \\ \dot{\tilde{\omega}} &= -\tilde{\theta} \cos \theta - \lambda_2(\rho\tilde{\theta} + \tilde{u}) \cos(\rho\theta + u) - \lambda_3 \tilde{\varphi} \cos \varphi - \beta\tilde{\omega}, \\ \dot{\tilde{\varphi}} &= -\lambda_3 \gamma^{-1} \tilde{\varphi} \cos \varphi + \tilde{\omega}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Далее, проводилось численное интегрирование набора из трех систем вида (3.1) с векторами переменных $\{\tilde{\theta}^{(k)}, \tilde{\omega}^{(k)}, \tilde{\varphi}^{(k)}\}_{k=1, \dots, 3}$ и $\tilde{u}^{(k)} = 0$ совместно с системой (2.7), причем векторы возмущений подвергались процедуре ортонормализации Грама–Шмидта через равные интервалы времени интегрирования $\Delta\tau = 1$. Логарифмы коэффициентов нормализации

Рис. 2. Портреты аттракторов в проекции на плоскость в сечении Пуанкаре $\theta \pmod{2\pi} = 0$ в случае $\lambda_2 = 0.8$: (а) $M = 2.3$ — двумерный тор, (б) $M = 3.0$ — трехмерный тор, (с) $M = 2.1$ — СНА, (д) $M = 2.2$ — хаос.

суммировались и усреднялись, что позволяет получить значения трех показателей Ляпунова, два из которых являются нетривиальными, а третий — нулевым.

Для двухчастотного тора на рисунке 2а получен набор ляпуновских показателей $\Lambda_1 = 0 \pm 10^{-5}$, $\Lambda_2 = -0.0979$, $\Lambda_3 = -0.798$ (один нулевой и два отрицательных), для трехчастотного тора на рисунке 2b — набор $\Lambda_1 = 0 \pm 10^{-5}$, $\Lambda_2 = 0 \pm 10^{-5}$, $\Lambda_3 = -0.937$ (два нулевых и один отрицательный). Аттрактор на рисунке 2с характеризуется набором $\Lambda_1 = 0 \pm 10^{-5}$, $\Lambda_2 = -0.105$, $\Lambda_3 = -0.894$, что свидетельствует о его нехаотической природе, хотя геометрическая структура аттрактора явно отлична от замкнутой гладкой кривой. И, наконец, хаотический аттрактор на рисунке 2d имеет набор из положительного, нулевого и отрицательного показателей: $\Lambda_1 = 0.0206$, $\Lambda_2 = 0 \pm 10^{-5}$, $\Lambda_3 = -0.869$. Отметим, что во всех случаях, говоря формально, следует считать присутствующим еще один, тривиальный нулевой показатель. Он получается, если учесть возможность добавления к фазе колебаний во втором уравнении системы (2.7) фазы $\xi = \rho\theta + u$ и дополнить систему (3.1) уравнением $\dot{\xi} = \rho\tilde{\omega}$. Мы оставляем этот момент за пределами основной линии рассуждений, но его надо иметь в виду для сохранения классических сигнатур ляпуновских показателей.

Характеристические спектры мощности для соответствующих режимов колебаний представлены на рисунке 3. Здесь $S(f_n) = (1/N) |\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k e^{i2\pi kn/N}|^2$, $f_n = n/N\Delta$, $n = 0, \dots, N/2$ и Δ — шаг дискретизации. Спектр выглядит как дискретный набор «пиков» для 2- и 3-частотных квазипериодических режимов (рис. 3а, b) и как сложная, но непрерывная функция частоты для хаотического режима (рис. 3d). Что касается режима нехаотической генерации со странным аттрактором (рис. 3с), то для него спектр обладает совмещенными чертами порядка и хаоса: явно виден плотный на оси частот набор характерных пиков, но при этом имеется «подложка», делающая функцию амплитуды не убывающей до нуля.

Рис. 3. Спектры мощности, рассчитанные по дискретной (в моменты $\theta \pmod{2\pi} = 0$) последовательности $\{\omega_n\}$ для системы (2.7) в случае $\lambda_2 = 0.8$: (а) $M = 2.3$ — двухчастотный тор, (b) $M = 3.0$ — трехчастотный тор, (с) $M = 2.1$ — СНА, (d) $M = 2.2$ — хаос.

Для наглядной характеристики спектров, по примеру работ [4–6], удобно ввести в рассмотрение спектральные суммы $Z(\Omega, m)$:

$$Z(\Omega, m) = \sum_{k=0}^{m-1} \omega_k e^{i2\pi k\Omega}, \quad (3.2)$$

где $\{\omega_k\}_{k=0,\dots,m-1}$ — последовательность значений динамической переменной, полученной при действии отображения Пуанкаре, а m — количество членов в сумме. Как известно, периодическим и квазипериодическим режимам соответствует дискретный спектр, в котором ненулевую амплитуду имеет счетное множество частотных компонент. Спектральные суммы для них накапливаются по закону $|Z|^2 \sim m^2$. Для прочих частот, отсутствующих в спектре, суммы не нарастают. В случае хаотических и стохастических сигналов точка на комплексной плоскости, обозначающая спектральную сумму, совершает случайное блуждание, которому отвечает линейное нарастание среднего квадрата модуля ($|Z|^2 \sim m$) для всех или почти всех значений частоты Ω , и спектр квалифицируется как «сплошной» (такие спектры рассматриваются в теории Винера–Хинчина). Что касается СНА, то для него, согласно работам [4–6], имеет место специальный случай так называемого «сингулярно-непрерывного» спектра, когда рост накапливающихся спектральных сумм характеризуется дробными показателями степени.

На рисунке 4 представлены графики зависимости квадрата модуля спектральной суммы $|Z(\Omega, m)|^2$ от длины рассматриваемого сегмента траектории m для различных значений частот Ω (верхний ряд графиков) и иллюстрация блуждания изображающей точки спектральной суммы на комплексной плоскости (нижний ряд). Максимальный рассматриваемый сегмент соответствует 10^7 точкам отображения Пуанкаре; для оценки показателя

Рис. 4. Графики зависимости квадрата модуля спектральной суммы $|Z(\Omega, m)|^2$ для различных значений частоты: (a) $\Omega = 1/3$, (b) $\Omega = \rho/5$, (c) $\Omega = \pi/3$, (d) $\Omega = \rho + 2/\rho$. В нижнем ряду представлены блуждания изображающей точки спектральной суммы на комплексной плоскости при тех же значениях частоты.

степени использовалась линейная аппроксимация методом наименьших квадратов по тридцати точкам с номерами, заданными числами Фибоначчи (от $F_6 = 8$ до $F_{35} = 9\,227\,465$). Графики построены в логарифмическом масштабе по обеим осям координат.

Численный анализ позволяет выделить несколько характерных типов поведения спектральных сумм с ростом m . Для произвольно выбранных рациональных и иррациональных значений частоты (см. рис. 4а и рис. 4б соответственно) квадрат модуля амплитуды $|Z|^2$ возрастает по степенному закону $|Z(\Omega, m)|^2 \sim m^\eta$ с показателем $0 \leq \eta < 1$. В некоторых случаях нарастание спектральных сумм не наблюдается (отсутствует или столь мало, что его сложно констатировать в численных расчетах, см. рис. 4с). С другой стороны, существует набор частот, для которых нарастание спектральных сумм следует закону, характерному для квазипериодической динамики: $|Z(\Omega, m)|^2 \sim m^2$. Эмпирически установлено, что соответствующие частоты могут быть заданы в виде суммы

$$\Omega = \sum_i a_i \rho^{b_i}, \quad (3.3)$$

где a_i и b_i — произвольные целые числа, которые могут быть как положительными, так и отрицательными, а количество членов в сумме не ограничено. Характерный пример поведения спектральной суммы для такого случая приведен на рисунке 4д при $\Omega = \rho + 2/\rho$. Следует также отметить, что поскольку значениям частотного параметра Ω , совпадающим по модулю 1, соответствует один и тот же показатель роста спектральной суммы, то частоты, заданные суммой (3.3), очевидно, порождают плотное множество спектральных пиков на единичном интервале числовой оси.

Нижний ряд графиков на рисунке 4 иллюстрирует блуждания точки, изображающей значение спектральной суммы, на комплексной плоскости. Это блуждание имеет вид псевдослучайной диффузии в случаях дробных значений показателя роста спектральной суммы и является направленным дрейфом для частот, заданных суммой (3.3).

Необходимо отметить, что полученные результаты несколько отличаются от результатов работ [4–6] для сингулярно-непрерывных спектров СНА, так как в цитируемых работах показатели степени роста спектральных сумм оказываются локализованы в интервале $1 < \eta \leq 2$, то есть между упорядоченным нарастанием и хаотической диффузией. Повидимому, в общем случае распределение компонент спектра в системах с СНА может подчиняться более сложным законам, чем в специфической дискретной модели, рассмотренной в упомянутых работах¹.

Для того чтобы однозначно идентифицировать СНА и отличить его от двухчастотного тора, имеющего в точности ту же сигнатуру ляпуновских показателей $\{0, -, -\}$, воспользуемся двумя методами, предложенными в работе [10].

Первый метод, именуемый методом рациональной аппроксимации, состоит в замене иррационального параметра ρ в системе (2.7) последовательностью приближающих рациональных дробей $\{\rho_k\}$, такой, что $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k$. Для ρ («золотого среднего») рациональными аппроксимантами являются отношения чисел Фибоначчи: $\rho_k = F_{k+1}/F_k$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. На k -м уровне аппроксимации вместо одной системы (2.7)

¹Помимо модельной системы (2.7), в ходе исследований были также проверены свойства спектральных сумм для «грубого» странного нехаотического аттрактора в системе Ханта и Отта (см. отображение (1) в статье [3], значения параметров те же). Результаты оказались идентичными полученным в настоящей работе, что указывает на наличие более общей закономерности, не связанной с выбором данной конкретной модельной системы (2.7).

с иррациональным параметром ρ будем рассматривать ансамбль аналогичных систем с рациональным параметром ρ_k . При этом значения начального угла u могут задаваться различными, и он становится существенным параметром системы. При вариации начального угла в интервале $u \in [0, 2\pi/F_k]$ множество значений переменной $\xi \pmod{2\pi}$ заполнит весь интервал $[0, 2\pi]$, а множество полученных орбит с разными значениями u сформирует полную аппроксимацию аттрактора исходной системы. Предполагается, что свойства исходной системы могут быть получены в пределе $k \rightarrow \infty$. В случае, когда аппроксимируемый аттрактор является гладким тором, аппроксимирующее множество также представляет собой замкнутую гладкую инвариантную кривую, состоящую из устойчивых циклов периода F_k и не содержащую бифуркационных точек. Если же при вариации начального угла u наблюдаются бифуркации орбит, то это делает аппроксимацию негладкой и свидетельствует о «странной» геометрии аппроксимируемого аттрактора. Наличие бифуркаций аппроксимирующих орбит на разных уровнях аппроксимации и их сохранение при увеличении ее точности является достаточным признаком существования СНА. При различных значениях периода F_k и начального угла u аппроксимация СНА может содержать периодические орбиты разного периода (кратного F_k), квазипериодические и хаотические орбиты.

Рисунок 5 иллюстрирует устройство аппроксимирующих множеств для СНА при тех же значениях параметров, что и на рисунке 2с, и для различных значений рационального аппроксиманта $\rho_k = 8/5, 13/8, 34/21, 55/34, 89/55, 144/89$. Каждый горизонтальный ряд диаграмм соответствует одному значению ρ_k . Рассмотрим верхний ряд диаграмм (см. рис. 5а), соответствующий $\rho_k = 8/5$. На первой диаграмме ряда представлено сечение Пуанкаре аппроксимирующего множества орбит в координатах $(\omega_n, \dot{\omega}_n)$. Здесь, как и прежде, сечение делается в моменты $\theta \pmod{2\pi} = 0$, а начальный угол u для орбит в множестве равномерно меняется в интервале $u \in [0, 2\pi/F_k]$. Тогда значения $\xi_n = 2\pi\rho_k n + u \pmod{2\pi}$ заполняют весь интервал $[0, 2\pi]$. На второй и третьей диаграммах ряда представлены развертки сечения Пуанкаре на плоскости переменных (ξ_n, ω_n) , причем на третьей диаграмме ξ_n принимает значения на интервале $\xi_n \in [0, 2\pi/F_k]$, что позволяет лучше различить бифуркационную структуру аппроксимирующего множества. На диаграммах видно наличие каскадов удвоения периода и перехода к хаосу, так что полная аппроксимация аттрактора представляет собой совокупность периодических и хаотических орбит. Наличие бифуркаций и хаоса подтверждается также графиками зависимости ляпуновских показателей от начального угла u , представленными на последней диаграмме ряда. В моменты бифуркаций показатель Λ_2 принимает нулевое значение, а в областях хаоса старший показатель Λ_1 становится положительным.

Последующие ряды рисунков (рис. 5b, c и т. д.) иллюстрируют структуру аппроксимирующих аттрактор множеств орбит при более высоких точностях аппроксимации. Можно наблюдать, что при повышении точности аппроксимации наличие бифуркаций сохраняется, а структура бифуркационных множеств усложняется, видны разрывы кривой в точках бифуркаций. При этом доля хаотических орбит уменьшается, что согласуется с наличием нехаотического предельного аттрактора. Такая структура аппроксимирующего множества, сохраняясь при увеличении точности аппроксимации, свидетельствует о негладкой структуре аттрактора в пределе при $\rho_k \rightarrow \rho$, что и требовалось показать.

Вторым из методов идентификации СНА является метод фазовой чувствительности (см. также [10]). Для его реализации в линеаризованной системе (3.1) введем дополнительную постоянную вариацию начальной фазы $\tilde{u} = \text{const} \neq 0$, после чего будем интегрировать систему (3.1) совместно с системой (2.7) и с начальными условиями $\tilde{\theta}(0) = 0$, $\tilde{\omega}(0) = 0$, $\tilde{\varphi}(0) = 0$ и $\tilde{u}(0) = 1$. Определим кусочно-гладкую функцию, имеющую значением

Рис. 5. Рациональные аппроксимации СЧА при $\lambda_2 = 0.8$, $M = 2.1$ и разных значениях ρ_k : (a) $\rho_5 = 8/5$, (b) $\rho_6 = 13/8$, (c) $\rho_8 = 34/21$, (d) $\rho_9 = 55/34$, (e) $\rho_{10} = 89/55$, (f) $\rho_{11} = 144/89$. Пояснения см. в тексте.

модуль вектора максимальной вариации переменных вдоль сегмента траектории: $\Gamma_{\max}(T) = \max_{t \in [0, T]} \sqrt{\tilde{\theta}^2(t) + \tilde{\omega}^2(t) + \tilde{\varphi}^2(t)}$. Далее, введем функцию фазовой чувствительности как минимум из N функций $\Gamma_{\max}(T)$, рассчитанных вдоль набора траекторий со случайно заданными начальными условиями: $\Gamma(T) = \min_{(\theta_n(0), \omega_n(0), \varphi_n(0))_{n=1, \dots, N}} \Gamma_{\max}(T)$. Известно, что функция фазовой чувствительности является ограниченной в случае, когда аттрактор представляет собой гладкий тор, и неограниченно возрастает в соответствии со степенным законом $\Gamma(T) \propto T^\delta$ (где $\delta > 0$ — показатель фазовой чувствительности) в случае странного нехаотического аттрактора. Типичные графики зависимости $\Gamma(T)$ для гладкого двухчастотного тора ($\delta = 0$) и для SNA ($\delta = 1.7$) представлены на рисунке 6а. Значения параметров те же, что на рисунке 2а, с.

Непосредственная проверка «странной» геометрической структуры аттрактора может быть выполнена путем расчета фрактальных размерностей. Такие размерности в обобщенном виде вводятся через спектр энтропий Реньи $H_q(\varepsilon)$, зависящих от параметра q (см. [34]):

$$H_q(\varepsilon) = \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q \right), \quad D_q = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H_q(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (3.4)$$

Здесь ε — размер элементов покрытия аттрактора, p_i — мера (вероятность посещения), приписываемая i -му элементу. Значение $q = 0$ соответствует емкостной размерности, значение $q = 1$ — информационной размерности, значение $q = 2$ — корреляционной размерности.² Считается, что для странного нехаотического аттрактора размерности таковы [2, 3]:

$$D_0 = 2, \quad D_1 = 1, \quad D_2 < 1.$$

Для расчета размерностей было построено сечение Пуанкаре для траектории на СНА в моменты $\theta_n = \theta_0 + 2\pi n$, $n = 1, \dots, 10^7$. Далее, при данном $q = 0, 1, 2$ строился график зависимости энтропии Реньи $H_q(\varepsilon)$ от масштаба разбиения ε , и на нем выделялся линейный участок, коэффициент наклона которого равен соответствующей фрактальной размерности аттрактора (см. рис. 6б). Были получены значения $D_0 = 1.8$, $D_1 = 1.02$, $D_2 = 0.96$, что разумным образом согласуется с оценкой [2, 3].

Рис. 6. (а) График функции фазовой чувствительности для режимов СНА ($\delta = 1.7$) и двухчастотного тора ($\delta = 0$). (б) Зависимость энтропии Реньи $H_q(\varepsilon)$ от масштаба разбиения ε для $q = 0, 1, 2$.

²Следует отметить, что при $q = 1$ в формуле (3.4) возникает неопределенность, раскрывающаяся по правилу Лопиталя.

4. Структура пространства параметров редуцированной модели и переходы между динамическими режимами

Исследуем вопрос существования устойчивого равновесия и колебательно-вращательного движения в системе (2.7). Для этого в каждом уравнении системы приравняем к нулю левую часть. Тогда из второго уравнения системы получим соотношение $\sin \theta + \lambda_2 \sin(\rho\theta + u) = M$, из которого непосредственно следует, что при $M > \lambda_2 + 1$ в механической системе не может наблюдаться неподвижного равновесия и движение должно быть ротационным, с накапливающимся во времени приращением фазы.

Подробное представление о структуре пространства параметров системы (2.7) дает рисунок 7а, на котором приведен фрагмент карты режимов системы в области нетривиальной динамики. Синий цвет^а обозначает области существования двухчастотного тора (2Т), зеленый — трехчастотного тора (3Т), желтый — странного нехаотического аттрактора (СНА), красный — хаотического аттрактора (ХА). В белой области, расположенной ниже линии $M = \lambda_2 + 1$, аттрактором является точка устойчивого равновесия (УР). Следует отметить, что колебательно-вращательные режимы могут существовать и в области значений параметров $M < \lambda_2 + 1$, совместно с устойчивым равновесием. Они реализуются при подходящем выборе начальных условий. Таким образом, имеет место мультистабильность. На рисунке 7б представлен увеличенный фрагмент карты в области сложных динамических переходов между регулярными и «странными» динамическими режимами (цвета имеют то же значение, что и на предыдущем рисунке). Из рисунков видно, что все базовые типы

Рис. 7. (а) Фрагмент карты динамических режимов системы (2.7). (б) Увеличенный фрагмент карты в области существования СНА и хаоса и сложных динамических переходов.

^аДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1702008/>

динамического поведения достаточно широко представлены в пространстве параметров системы.

Зафиксируем значение параметра $\lambda_2 = 0.8$ и проанализируем динамические переходы, наблюдаемые в системе (2.7) при увеличении вращающего момента M . Двигаясь вдоль левого среза карты на рисунке 7b, можно наблюдать последовательность переходов между следующими режимами динамики: $УР \rightarrow 2Т \rightarrow СНА \rightarrow ХА \rightarrow 2Т \rightarrow 3Т$. Рассмотрим их в подробностях. Переход $УР \rightarrow 2Т$ происходит вследствие обратной седло-узловой бифуркации устойчивого равновесия, после чего в системе возникает двухчастотное квазипериодическое вращение. При дальнейшем увеличении параметра M двухчастотный тор разрушается с образованием странного нехаотического аттрактора ($2Т \rightarrow СНА$). В свою очередь, области СНА чередуются с хаосом, пока не происходит следующая седло-узловая бифуркация и в системе рождается новый аттрактор — гладкий тор ($ХА \rightarrow 2Т$). При дальнейшем увеличении M наблюдается последовательность прямых и обратных седло-узловых бифуркаций и языков синхронизации, так что области двух- и трехчастотной квазипериодической динамики чередуются на малом масштабе вариации M .

На рисунке 8a представлены соответствующие графики зависимости ляпуновских показателей от значения параметра M . Эти графики также позволяют выделить интервалы устойчивого равновесия ($\Lambda_{1,2,3} < 0$), двухчастотных квазипериодических движений или СНА ($\Lambda_1 = 0, \Lambda_{2,3} < 0$), трехчастотного квазипериодического движения ($\Lambda_{1,2} = 0, \Lambda_3 < 0$), хаоса ($\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 < 0$). Основываясь на значениях ляпуновских показателей в точках переходов между динамическими режимами, можно также предположить, являются соответствующие бифуркации гладкими (фазонезависимыми) или же негладкими (фазозависимыми).³ В момент гладкого перехода старший из нетривиальных показателей Ляпунова принимает нулевое значение, как это происходит при переходах $УР \rightarrow 2Т$ ($\Lambda_1 = 0$), $ХА \rightarrow 2Т$ ($\Lambda_{1,2} = 0$) и $2Т \rightarrow 3Т$ ($\Lambda_2 = 0$). С другой стороны, переход $2Т \rightarrow СНА$ является негладким, с ненулевым значением старшего из нетривиальных ляпуновских показателей ($\Lambda_2 < 0$), а переход $СНА \rightarrow ХА$ носит статистический характер [35]. На рисунке 8b продемонстрирован аналогичный график для значения $\lambda_2 = 1.1$. Следует обратить внимание на переход $СНА \rightarrow 2Т$ на рисунке 8b: он также происходит по фазозависимому механизму, с ненулевым показателем ($\Lambda_2 < 0$, см. увеличенный фрагмент).

5. Аттракторы и динамические переходы в исходной механической системе

До сих пор мы изучали редуцированную (3D) систему (2.7). В настоящем разделе мы вернемся к исходной (4D) механической системе, описываемой уравнениями (2.6), и выясним, каким образом математическое упрощение модели повлияло на наблюдаемый круг динамических явлений. При этом будем исходить из предположения, что редукция исходных уравнений не сыграла принципиальной роли и не привела к возникновению новых видов динамики, нетипичных для реалистичной механической системы.

³Под «гладкими» подразумеваются такие бифуркации тора, когда все квазипериодические орбиты трансформируются одновременно, независимо от координаты фазы на торе; например, так происходит при гладкой седло-узловой бифуркации, когда устойчивый тор однородно сталкивается с седловым. При «негладкой», фазозависимой седло-узловой бифуркации столкновение происходит лишь на плотном множестве точек на торе. Гладкие и негладкие бифуркации торов подробно рассмотрены в работе [16], а в статье [17] развит соответствующий ренормгрупповой анализ.

Рис. 8. Графики зависимости ляпуновских показателей от параметра M : (a) $\lambda_2 = 0.8$, (b) $\lambda_2 = 1.1$.

Выберем значение «малого» параметра $\mu = 0.1$, остальные параметры — те же ($\lambda_3 = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\rho = (\sqrt{5} + 1)/2$), варьировать будем λ_2 и M . Перепишем систему (2.6) в виде

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -\sin \theta - \lambda_2 \sin(\rho\theta + u) + \gamma\psi - (\beta + \gamma)\omega + M, \\ \dot{\varphi} &= \psi, \\ \dot{\psi} &= \mu^{-1}(-\lambda_3 \sin \varphi + \gamma(\omega - \psi)).\end{aligned}\tag{5.1}$$

На рисунке 9 представлены примеры аттракторов системы (5.1): двух- и трехчастотные торы, странный нехаотический и хаотический аттракторы. Соответствующие значения ляпуновских показателей можно рассчитать так же, как и прежде, путем линеаризации системы (5.1) и использования алгоритма Бенеттина. Они приведены ниже:

- (a) $\Lambda_1 = 0 \pm 10^{-5}$, $\Lambda_2 = -0.0472$, $\Lambda_3 = -0.7225$, $\Lambda_4 = -11.23$,
- (b) $\Lambda_1 = 0 \pm 10^{-5}$, $\Lambda_2 = 0 \pm 10^{-5}$, $\Lambda_3 = -0.8439$, $\Lambda_4 = -11.16$,
- (c) $\Lambda_1 = 0 \pm 10^{-5}$, $\Lambda_2 = -0.0583$, $\Lambda_3 = -0.7921$, $\Lambda_4 = -11.15$,
- (d) $\Lambda_1 = 0.0247$, $\Lambda_2 = 0 \pm 10^{-5}$, $\Lambda_3 = -0.7852$, $\Lambda_4 = -11.24$.

На рисунке 10 представлены спектры мощности для режимов колебаний при тех же значениях параметров. Они имеют характерный вид дискретных пиков для двух- и трехчастотного квазипериодических режимов (рис. 10а, б) и непрерывных зависимостей с характерными «выбросами» на отдельных частотах для странного нехаотического (рис. 10с) и хаотического (рис. 10д) аттракторов.

Рис. 9. Портреты аттракторов системы (5.1) в проекции на плоскость в сечении Пуанкаре $\theta \pmod{2\pi} = 0$ в случае $\lambda_2 = 0.8$: (a) $M = 2.15 - 2T$, (b) $M = 3.0 - 3T$, (c) $M = 2.0 - \text{СНА}$, (d) $M = 2.04 - \text{хаос}$.

Рис. 10. Спектры мощности колебательных режимов для системы (5.1): (a) $M = 2.15 - 2T$, (b) $M = 3.0 - 3T$, (c) $M = 2.0 - \text{СНА}$, (d) $M = 2.04 - \text{хаос}$.

Для того чтобы характеризовать СНА, отличая его от двухчастотного тора, имеющего ту же сигнатуру ляпуновских показателей, воспользуемся методом фазовой чувствительности, описанным в разделе 3 для укороченной системы. Введем функцию фазовой чувствительности через соотношения $\Gamma_{\max}(T) = \max_{t \in [0, T]} (\hat{\theta}^2(t) + \tilde{\omega}^2(t) + \tilde{\varphi}^2(t) + \tilde{\psi}^2(t))^{-1/2}$ и $\Gamma(T) = \min_{(\theta_n(0), \omega_n(0), \varphi_n(0), \psi_n(0))_{n=1, \dots, N}} \Gamma_{\max}(T)$. Значение показателя фазовой чувствительности для режима СНА при указанных выше значениях параметров оказывается $\delta \approx 2.6$; для двухчастотного тора функция фазовой чувствительности ограничена ($\delta = 0.0$, см. рис. 11а). Проверка динамико-метрических характеристик аттрактора посредством вычисления размерностей из спектра Реньи указывает на наличие у аттрактора фрактальной структуры: он обладает емкостной размерностью $D_0 \approx 1.9$, информационной размерностью $D_1 \approx 1.1$ и корреляционной размерностью $D_2 \approx 0.97$ (см. рис. 11b), что согласуется с ранее известными результатами [2, 3].

Рис. 11. (а) График функции фазовой чувствительности для режимов СНА ($\delta = 2.6$) и двухчастотного тора ($\delta = 0$). (б) Зависимость энтропии Реньи $H_q(\varepsilon)$ от масштаба разбиения ε для $q = 0, 1, 2$.

Таким образом, можно заключить, что нередуцированная система (5.1) действительно обладает теми же базовыми типами автоколебательных динамических режимов (и соответствующими им аттракторами в фазовом пространстве), что и редуцированная система (2.7). Рассмотрим устройство пространства параметров системы (5.1) в различных сечениях. На рисунке 12 представлены две карты динамических режимов системы (5.1): на плоскости параметров (λ_2, M) при $\mu = 0.1$ (рис. 12а) и на плоскости (μ, M) при $\lambda_2 = 0.8$ (рис. 12b).

Сравнивая карты режимов на рисунке 12а и на рисунке 7b, можно видеть схожесть устройства областей различной динамики при заданном уровне малого параметра $\mu = 0.1$. Во-первых, как и прежде, устойчивое равновесие системы возможно лишь в области $M < \lambda_2 + 1$, что можно проверить, приравняв к нулю левые части в уравнениях системы (5.1). При подходящем выборе начальных условий в данной области может наблюдаться и колебательно-вращательное движение, то есть присутствует мультистабильность. Во-вторых, выход системы из положения равновесия может приводить к возникновению как двухчастотных квазипериодических, так и странных нехаотических и хаотических движений. В-третьих, как и прежде, с увеличением вращающего момента M в системе возникают трехчастотные колебательные режимы, которые «вытесняют» собой прочую динамику.

Вторая карта (рис. 12b) показывает, как набор базовых режимов изменяется по мере того, как сильное сжатие в фазовом пространстве уменьшается при увеличении параметра μ . Из карты непосредственно следует, что нетривиальные типы динамики (такие, как СНА и хаос) главным образом существуют при $\mu < 0.3$. При больших значениях параметра μ

Рис. 12. Фрагменты карты режимов динамической системы (5.1): (а) на плоскости (λ_2, M) при $\mu = 0.1$ и (б) на плоскости (μ, M) при $\lambda_2 = 0.8$.

динамика системы вырождается в двух- и (главным образом) трехчастотное квазипериодическое движение. Памятуя о физическом смысле параметра μ (см. рис. 1 и формулы (2.5)), можно заключить, что нетривиальное поведение модельной механической системы реализуется при относительно небольших значениях (i) вращающего момента, действующего на диск 1, и (ii) размере диска 3 и сосредоточенной на нем массы.

6. Заключение

В заключение отметим, что интерес к «странной» и хаотической динамике в системах именно автоколебательной природы не случаен. Исследование таких систем имеет как теоретическое, так и непосредственно прикладное значение. Автогенераторы могут быть предпочтительны по сравнению с генераторами вынужденных колебаний в таких практических приложениях, где необходима синхронизация связанных подсистем, в частности в области безопасной коммуникации, поскольку отсутствие общей внешней вынуждающей силы упрощает процедуру синхронизации передатчика и приемника. Идея использования систем со странным нехаотическим аттрактором в схемах безопасной коммуникации уже находила выражение (например, в работах [36, 37]). В этом контексте, конструирование систем, демонстрирующих странные нехаотические автоколебания в широких областях пространства параметров, вызывает особый интерес. Разумеется, открытой остается проблема разработки радиотехнических систем с данными свойствами. Однако и автономная форма уравнений со странным нехаотическим аттрактором, полученных в настоящей работе, как и сама идея преобразования иррационально соотносящихся пространственных масштабов в несоизмеримые по частоте колебательные моды, значительно расширяют класс систем, способных демонстрировать странную нехаотическую динамику.

References

- [1] Feudel U., Kuznetsov S., Pikovsky A. *Strange nonchaotic attractors: Dynamics between order and chaos in quasiperiodically forced systems*, World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, vol. 56, Hackensack, N.J.: World Sci., 2006.
- [2] Ding M. Zh., Grebogi C., Ott E. Dimensions of strange nonchaotic attractors, *Phys. Lett. A*, 1989, vol. 137, nos. 4–5, pp. 167–172.
- [3] Hunt B. R., Ott E. Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors, *Phys. Rev. Lett.*, 2001, vol. 87, no. 25, 254101, 4 pp.

- [4] Pikovsky A. S., Feudel U. Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors, *J. Phys. A*, 1994, vol. 27, no. 15, pp. 5209–5219.
- [5] Feudel U., Pikovsky A., Politi A. Renormalization of correlations and spectra of a strange nonchaotic attractor, *J. Phys. A*, 1996, vol. 29, no. 17, pp. 5297–5311.
- [6] Pikovsky A. S., Zaks M. A., Feudel U., Kurths J. Singular continuous spectra in dissipative dynamics, *Phys. Rev. E* (3), 1995, vol. 52, no. 1, part A, pp. 285–296.
- [7] Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J. A. Strange attractors that are not chaotic, *Phys. D*, 1984, vol. 13, nos. 1–2, pp. 261–268.
- [8] Bondeson A., Ott E., Antonsen T. M. Jr. Quasiperiodically forced damped pendula and Schrödinger equations with quasiperiodic potentials: Implications of their equivalence, *Phys. Rev. Lett.*, 1985, vol. 55, no. 20, pp. 2103–2106.
- [9] Ding M., Grebogi C., Ott E. Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: From quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic, *Phys. Rev. A*, 1989, vol. 39, no. 5, pp. 2593–2598.
- [10] Pikovsky A. S., Feudel U. Characterization of strange nonchaotic attractors, *Chaos*, 1995, vol. 5, no. 1, pp. 253–260.
- [11] Feudel U., Kurths J., Pikovsky A. S. Strange non-chaotic attractor in a quasiperiodically forced circle map, *Phys. D*, 1995, vol. 88, nos. 3–4, pp. 176–186.
- [12] Kunetsov S. P., Pikovsky A. S., Feudel U. Birth of a strange nonchaotic attractor: A renormalization group analysis, *Phys. Rev. E* (3), 1995, vol. 51, no. 3, part A, R1629–R1632.
- [13] Nishikawa T., Kaneko K. Fractalization of a torus as a strange nonchaotic attractor, *Phys. Rev. E*, 1996, vol. 54, no. 6, pp. 6114–6124.
- [14] Glendinning P. Intermittency and strange nonchaotic attractors in quasi-periodically forced circle maps, *Phys. Lett. A*, 1998, vol. 244, no. 6, pp. 545–550.
- [15] Kim S.-Y., Lim W., Ott E. Mechanism for the intermittent route to strange nonchaotic attractors, *Phys. Rev. E*, 2003, vol. 67, no. 5, 056203, 5 pp.
- [16] Osinga H., Wiersig J., Glendinning P., Feudel U. Multistability and nonsmooth bifurcations in the quasiperiodically forced circle map, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2001, vol. 11, no. 12, pp. 3085–3105.
- [17] Kuznetsov S. P. Torus fractalization and intermittency, *Phys. Rev. E* (3), 2002, vol. 65, no. 6, 066209, 13 pp.
- [18] Kuznetsov S. P., Neumann E. Torus fractalization and singularities in the current-voltage characteristics for the quasiperiodically forced Josephson junction, *Europhys. Lett.*, 2003, vol. 61, no. 1, pp. 20–26.
- [19] Jalnine A. Yu., Osbaldestin A. H. Smooth and non-smooth dependence of Lyapunov vectors upon the angle variable on a torus in the context of torus-doubling transitions in the quasiperiodically forced Hénon map, *Phys. Rev. E* (3), 2005, vol. 71, no. 1, 016206, 14 pp.
- [20] Jalnine A. Yu., Kuznetsov S. P., Osbaldestin A. H. Dynamics of small perturbations of orbits on a torus in a quasiperiodically forced 2D dissipative map, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2006, vol. 11, no. 1, pp. 19–30.
- [21] Jalnine A. Yu., Kuznetsov S. P. On the realization of the Hunt–Ott strange nonchaotic attractor in a physical system, *Tech. Phys.*, 2007, vol. 52, no. 4, pp. 401–408; see also: *Zh. Tekh. Fiz.*, 2007, vol. 77, no. 4, pp. 10–18.
- [22] Ditto W. L., Spano M. L., Savage H. T., Raueo S. N., Heagy J., Ott, E. Experimental observation of a strange nonchaotic attractor, *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 65, no. 5, pp. 533–536.
- [23] Vohra S. T., Bucholtz F., Koo K. P., Dagenais D. M. Experimental observation of period-doubling suppression in the strain dynamics of a magnetostrictive ribbon, *Phys. Rev. Lett.*, 1991, vol. 66, no. 2, pp. 212–215.
- [24] Zhou T., Moss F., Bulsara A. Observation of a strange nonchaotic attractor in a multistable potential, *Phys. Rev. A*, 1992, vol. 45, no. 8, pp. 5394–5400.
- [25] Ding W. X., Deutsch H., Dinklage A., Wilke C. Observation of a strange nonchaotic attractor in a neon glow discharge, *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 55, no. 3, pp. 3769–3772.

- [26] Yang T., Bilimgut K. Experimental results of strange nonchaotic phenomenon in a second-order quasi-periodically forced electronic circuit, *Phys. Lett. A*, 1997, vol. 236, nos. 5–6, pp. 494–504.
- [27] Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznev Ye.P. Experimental observation of dynamics near the torus-doubling terminal critical point, *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 62, no. 6, pp. 7828–7830.
- [28] Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V. Strange nonchaotic attractors in autonomous and periodically driven systems, *Phys. Rev. E*, 1996, vol. 54, no. 4, pp. 3231–3234.
- [29] Pikovsky A.S., Feudel U. Comment on «Strange nonchaotic attractors in autonomous and periodically driven systems», *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 56, no. 6, pp. 7320–7321.
- [30] Mitsui T., Aizawa Y. Intermittency route to strange nonchaotic attractors in a non-skew-product map, *Phys. Rev. E*, 2010, vol. 81, no. 4, 046210, 8 pp.
- [31] Jalnine A. Yu., Kuznetsov S.P. Strange nonchaotic self-oscillator, *Europhys. Lett.*, 2016, vol. 115, no. 3, 30004, 5 pp.
- [32] Goldstein H., Poole Ch.P. Jr., Safko J.L. *Classical mechanics*, 3rd ed., Boston, Mass.: Addison-Wesley, 2001.
- [33] Pikovsky A., Politi A. *Lyapunov exponents: A tool to explore complex dynamics*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2016.
- [34] Ott E. *Chaos in dynamical systems*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
- [35] Jalnine A. Yu. Statistical properties of the intermittent transition to chaos in the quasi-periodically forced system, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Prikl. Nelin. Dinam.*, 2006, vol. 14, no. 5, pp. 30–43 (Russian).
- [36] Ramaswamy R. Synchronization of strange nonchaotic attractors, *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 56, no. 6, pp. 7294–7296.
- [37] Zhou C., Chen T. Robust communication via synchronization between nonchaotic strange attractors, *Europhys. Lett.*, 1997, vol. 38, no. 4, pp. 261–265.

Autonomous strange non-chaotic oscillations in a system of mechanical rotators

Alexey Yu. Jalnine¹, Sergey P. Kuznetsov²

¹Saratov Branch of Kotelnikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS
ul. Zelenaya 38, Saratov, 410019, Russia

²Udmurt State University
ul. Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia

¹Jalnine@rambler.ru, ²spkuz@yandex.ru

We investigate strange nonchaotic self-oscillations in a dissipative system consisting of three mechanical rotators driven by a constant torque applied to one of them. The external driving is nonoscillatory; the incommensurable frequency ratio in vibrational-rotational dynamics arises due to an irrational ratio of diameters of the rotating elements involved. It is shown that, when losing stable equilibrium, the system can demonstrate two- or three-frequency quasi-periodic, chaotic and strange nonchaotic self-oscillations. The conclusions of the work are confirmed by numerical calculations of Lyapunov exponents, fractal dimensions, spectral analysis, and by special methods of detection of a strange nonchaotic attractor (SNA): phase sensitivity and analysis using rational approximation for the frequency ratio. In particular, SNA possesses a zero value of the largest Lyapunov exponent (and negative values of the other exponents), a capacitive dimension close to “2” and a singular continuous power spectrum. In general, the results of this work shed a new light on the occurrence of strange nonchaotic dynamics.

MSC 2010: 34C15, 34C28, 34C46, 37C55, 37C70, 37D45, 70K43

Keywords: autonomous dynamical system, mechanical rotators, quasi-periodic oscillations, strange nonchaotic attractor, chaos

Received March 31, 2017, accepted April 18, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 257–275 (Russian)