ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.36, 531.53

MSC 2010: 70H05, 70H15, 70E50

Об устойчивости движения маятника Максвелла

А. П. Маркеев

Исследуется устойчивость движения маятника Максвелла в однородном поле тяжести [1, 2]. Нити, на которых подвешены ось и диск маятника, предполагаются невесомыми и нерастяжимыми, а характерный линейный размер диска считается малым по сравнению с длинами нитей.

В невозмущенном движении угол, который составляют нити с вертикалью, равен нулю, а диск движется вдоль вертикали, вращаясь вокруг своей горизонтальной оси. Решается нелинейная задача об устойчивости этого движения по отношению к малым отклонениям нитей от вертикали.

При помощи канонических преобразований и метода поверхностей сечения Пуанкаре задача приведена к исследованию устойчивости неподвижной точки сохраняющего площадь отображения плоскости в себя. В пространстве безразмерных параметров задачи выделены области устойчивости и неустойчивости.

Ключевые слова: устойчивость, отображение, канонические преобразования

Получено 23 января 2017 года

После доработки 10 апреля 2017 года

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (14-21-00068) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

Маркеев Анатолий Павлович

markeev@ipmnet.ru

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

119526, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, д. 101, стр. 1

Московский физико-технический институт (государственный университет)

141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

1. Введение

Рис. 1. Маятник Максвелла.

Маятник Максвелла представляет собой устройство, состоящее (рис. 1) из массивного диска, жестко закрепленного на оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр тяжести. Ось подвешена на двух одинаковых длинных и тонких нитях. Нити считаются невесомыми и нерастяжимыми, в положении равновесия диска ось занимает горизонтальное положение.

Маятник Максвелла используется для иллюстрации свойств плоского движения твердого тела в однородном поле тяжести, в частности для демонстрации перехода кинетической энергии вращающегося тела в его потенциальную энергию и обратно [1, 2].

При проведении эксперимента нить аккуратно, виток к витку, наматывается на ось, за счет чего диск поднимается на некоторую высоту. Если затем диск отпустить, то под действием силы тяжести он, вращаясь вокруг оси, начнет опускаться вниз. При этом нити будут натянутыми, а ось горизонтальна. Такое движение продолжается до момента полного разматывания нитей. После этого момента диск, сообщив «рывок» нитям и продолжая вращение, начинает подниматься вверх, при этом нити остаются натянутыми и наматываются на ось. Если нити нерастяжимы, а сопротивление внешней среды пренебрежимо мало, то диск поднимется на первоначальную высоту и далее процесс повторяется. Периодичность этого процесса дает основание называть рассматриваемое устройство маятником.

В описанном движении угол, который составляют нити с фиксированной вертикальной плоскостью (проходящей через точки подвеса нитей), равен нулю. Основная цель статьи состоит в исследовании задачи об устойчивости рассматриваемого невозмущенного движения маятника по отношению к малым возмущениям этого угла. В пространстве безразмерных параметров задачи указаны области устойчивости и неустойчивости.

2. Уравнения движения и их частное периодическое решение

Рис. 2. К выводу уравнений движения маятника.

Пусть m — масса маятника (равная сумме масс диска и оси, на которой он закреплен). Считаем, что ось — цилиндр радиуса r , а центр масс C маятника совпадает с центром масс диска. Через J_c обозначим момент инерции маятника относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку C . Пусть ℓ — длина каждой из нитей в их разматанном состоянии, а d — расстояние от точки O подвеса какой-либо из нитей до точки A ее схода с оси маятника (рис. 2). Положение маятника зададим двумя обобщенными координатами: углом θ между направлением нитей и вертикальной плоскостью, проходящей через точки подвеса нитей, и величиной $\xi = \ell - d$.

Ввиду нерастяжимости нитей имеем неудерживающую связь

$$\xi \geq 0. \quad (2.1)$$

Векторы $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_C$ скоростей точек A и C маятника связаны соотношением

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AC}, \quad (2.2)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор мгновенной угловой скорости диска, этот вектор имеет горизонтальное направление. Так как нити нерастяжимы, то вектор $\mathbf{v}_A$ коллинеарен вектору $\mathbf{AC}$, а для модулей векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_A$ имеют место равенства

$$\omega = \left| \dot{\theta} - \frac{\dot{d}}{r} \right|, \quad v_A = d|\dot{\theta}|. \quad (2.3)$$

Точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Из теоремы Кёнига, при учете равенств (2.2) и (2.3), получаем выражение для кинетической энергии маятника,

$$T = \frac{1}{2} m(\ell - \xi)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (J_c + mr^2) \left(\dot{\theta} + \frac{\dot{\xi}}{r} \right)^2. \quad (2.4)$$

Потенциальная энергия маятника вычисляется по формуле

$$\Pi = mg[\xi \cos \theta + r \sin \theta + \ell(1 - \cos \theta)], \quad (2.5)$$

где g — ускорение свободного падения.

При $\xi > 0$ (связь (2.1) ослаблена) движению маятника отвечает функция Лагранжа $L = T - \Pi$. При $\xi = 0$ (связь (2.1) напряжена) движение маятника имеет характер абсолютно упругого удара. Поэтому [3] имеет место равенство

$$\dot{\xi}^+ = -\dot{\xi}^-. \quad (2.6)$$

Здесь и далее индексами минус и плюс отмечаются значения соответствующих величин непосредственно до и после удара.

Уравнения движения, при учете равенств (2.6), допускают периодическое решение с периодом $\tau_* = 2\sqrt{2\alpha\beta\ell/g}$, где α и β — безразмерные параметры:

$$\alpha = \frac{h}{\ell} \quad (0 < \alpha < 1), \quad \beta = 1 + \frac{J_c}{mr^2} \quad (\beta > 1). \quad (2.7)$$

Это решение отвечает описанному в первом разделе статьи невозмущенному периодическому движению маятника. При $0 \leq t < \tau_*$ оно задается равенствами

$$\theta = 0, \quad \xi = -\frac{g}{2\beta} t^2 + \sqrt{2\frac{\alpha}{\beta} g \ell} t. \quad (2.8)$$

За начальный момент времени $t = 0$ принят момент, когда $\xi = 0$, а центр тяжести диска начинает свое движение вверх, имея скорость $\sqrt{2\alpha g \ell / \beta}$; обратное движение вниз начинается в момент времени $t = \tau_*/2$, когда величина ξ достигает своего максимального значения, равного h .

3. Упрощение выражения для кинетической энергии

Для дальнейшего исследования удобно вместо угла θ ввести новую обобщенную координату ψ , такую, чтобы выражение для кинетической энергии маятника не содержало произведения обобщенных скоростей $\dot{\xi}\dot{\psi}$. Вычисления показывают, что величина ψ может быть определена посредством равенства

$$\theta = \psi + \sqrt{\beta} \left[\operatorname{arctg} \frac{\ell - \xi}{\sqrt{\beta} r} - \operatorname{arctg} \frac{\ell}{\sqrt{\beta} r} \right]. \quad (3.1)$$

При таком выборе ψ выражение (2.4) для кинетической энергии маятника принимает вид

$$T = \frac{1}{2} m \frac{\beta(\ell - \xi)^2}{\beta r^2 + (\ell - \xi)^2} \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m [\beta r^2 + (\ell - \xi)^2] \dot{\psi}^2. \quad (3.2)$$

Потенциальная энергия вычисляется по формуле (2.5), в которой угол θ заменен на правую часть равенства (3.1).

4. Функция Гамильтона

В дальнейшем для описания движения маятника при ослабленной связи ($\xi > 0$) будем использовать гамильтонову форму уравнений движения. Введя обобщенные импульсы

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = m[\beta r^2 + (\ell - \xi)^2] \dot{\psi}, \quad p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \frac{m\beta(\ell - \xi)^2}{\beta r^2 + (\ell - \xi)^2} \dot{\xi}, \quad (4.1)$$

получим функцию Гамильтона

$$\Gamma = \frac{\beta r^2 + (\ell - \xi)^2}{2m\beta(\ell - \xi)^2} p_\xi^2 + \frac{p_\psi^2}{2m[\beta r^2 + (\ell - \xi)^2]} + \Pi. \quad (4.2)$$

Вместо переменных ξ, ψ, p_ξ, p_ψ введем безразмерные переменные x, y, p_x, p_y при помощи канонического (с валентностью $\tau_*/(2\pi m\ell^2)$) преобразования

$$\xi = \ell x, \quad \psi = y, \quad p_\xi = \frac{2\pi m\ell}{\tau_*} p_x, \quad p_\psi = \frac{2\pi m\ell^2}{\tau_*} p_y \quad (4.3)$$

и перейдем к безразмерной независимой переменной τ по формуле

$$\tau = \frac{2\pi}{\tau_*} t. \quad (4.4)$$

Новым переменным будет отвечать функция Гамильтона G вида

$$G = G_0 + \frac{p_y^2}{2(1-x)^2} + \frac{2\alpha\beta}{\pi^2}(1-x)(1-\cos\theta) + \\ + \mu \frac{2\alpha\sqrt{\beta}}{\pi^2} \sin\theta + \frac{\mu^2}{2(1-x)^2} \left[\frac{p_x^2}{\beta} - \frac{p_y^2}{\mu^2 + (1-x)^2} \right], \quad (4.5)$$

где

$$G_0 = \frac{p_x^2}{2\beta} + \frac{2\alpha\beta}{\pi^2} x. \quad (4.6)$$

Параметры α и β задаются равенствами (2.7), а μ — третий безразмерный параметр задачи:

$$\mu = \sqrt{\frac{J_c + mr^2}{m\ell^2}}. \quad (4.7)$$

Величина θ в формуле (4.5) — функция от x, y , определяемая из (3.1) и (4.3). Неудерживающая связь (2.1) записывается в виде неравенства $x \geq 0$.

При $x > 0$ движение описывается каноническими уравнениями с функцией Гамильтона (4.5). При $x = 0$ (на этапе ударного движения маятника) имеем

$$p_x^+ = -p_x^-. \quad (4.8)$$

В переменных τ, x, y, p_x, p_y периодическое решение (2.8) записывается в виде

$$\begin{aligned} y &= -\sqrt{\beta} \left[\arctg \frac{1-x}{\mu} - \arctg \frac{1}{\mu} \right], \quad p_y = \frac{2\mu}{\pi} \alpha \sqrt{\beta} \varphi_1(\tau), \\ x &= \alpha \varphi_2(\tau), \quad p_x = \frac{2}{\pi} \alpha \beta \frac{(1-x)^2}{\mu^2 + (1-x)^2} \varphi_1(\tau). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь φ_1 и φ_2 — 2π -периодические функции τ . При $0 \leq \tau < 2\pi$ они задаются равенствами

$$\varphi_1(\tau) = 1 - \frac{\tau}{\pi}, \quad \varphi_2(\tau) = \frac{\tau}{\pi} \left(2 - \frac{\tau}{\pi} \right). \quad (4.10)$$

Уравнения движения допускают интеграл энергии $G = \text{const}$. На решении (4.9) имеем

$$G = \frac{2\alpha^2\beta}{\pi^2}. \quad (4.11)$$

5. Преобразование функции Гамильтона

Так как длины ℓ нитей маятника предполагаются большими, то параметр μ , определяемый равенством (4.7), можно считать малым ($0 < \mu \ll 1$). При $\mu \rightarrow 0$ решение (4.9) переходит в решение

$$y = 0, \quad p_y = 0, \quad x = \alpha \varphi_2(\tau), \quad p_x = \frac{2\alpha\beta}{\pi} \varphi_1(\tau).$$

Для этого решения функции x и p_x удовлетворяют уравнениям с функцией Гамильтона G_0 .

Введем новые переменные q_i, p_i ($i = 1, 2$) при помощи унивалентного канонического преобразования вида

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{9\pi^4}{16\alpha\beta^2} \right)^{1/3} p_1^{2/3} \varphi_2(q_1), \quad p_x = \left(\frac{6\alpha\beta^2}{\pi} \right)^{1/3} p_1^{1/3} \varphi_1(q_1), \\ y &= q_2, \quad p_y = p_2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Величины p_1, q_1 — это переменные действие–угол в системе с функцией Гамильтона G_0 (при учете равенства (4.8)), а φ_1, φ_2 — функции (4.10).

Преобразованная функция Гамильтона получается подстановкой выражений (5.1) в правую часть равенства (4.5). В частности, функция G_0 в новых переменных зависит только от p_1 и имеет вид

$$G_0 = \left(\frac{9\alpha^2\beta}{2\pi^2} \right)^{1/3} p_1^{2/3}.$$

В переменных q_i, p_i периодическое решение (4.9) записывается в виде $q_i = f_i(\tau)$, $p_i = g_i(\tau)$ ($i = 1, 2$), где функции f_i, g_i (с погрешностью порядка μ^3) задаются равенствами

$$\begin{aligned} f_1 &= \tau + \mu^2 \frac{\pi\varphi_1\varphi_2}{(1-\alpha\varphi_2)^2}, & f_2 &= \mu \frac{\alpha\sqrt{\beta}\varphi_2}{1-\alpha\varphi_2}, \\ g_1 &= \frac{4\alpha^2\beta}{3\pi^2} \left[1 - \mu^2 \frac{3\varphi_1^2}{(1-\alpha\varphi_2)^2} \right], & g_2 &= \mu \frac{2\alpha\sqrt{\beta}}{\pi} \varphi_1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Сделаем еще одно каноническое унивалентное преобразование $q_1, p_1, q_2, p_2 \rightarrow \xi_1, \eta_1, q, p$, чтобы в новых переменных исследуемое периодическое движение маятника задавалось равенствами $\xi_1(\tau) = \tau$, $\eta_1 = q = p = 0$, а преобразованная функция Гамильтона была 2π -периодической по координате ξ_1 . Следуя [4], это преобразование можно получить таким:

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(\xi_1), & p_1 &= g_1(\xi_1) + \left[\frac{df_1(\xi_1)}{d\xi_1} \right]^{-1} \left[\eta_1 + \frac{dg_2(\xi_1)}{d\xi_1} q - \frac{df_2(\xi_1)}{d\xi_1} p \right], \\ q_2 &= f_2(\xi_1) + q, & p_2 &= g_2(\xi_1) + p. \end{aligned} \quad (5.3)$$

В переменных ξ_1, η_1, q, p функция Гамильтона представима сходящимся рядом:

$$G = \frac{2\alpha^2\beta}{\pi^2} + \sum_{k=2}^{\infty} G_k(\eta_1, q, p, \xi_1), \quad (5.4)$$

где G_k — формы степени k относительно $|\eta_1|^{1/2}, q, p$, коэффициенты которых — 2π -периодические функции ξ_1 . В частности,

$$\begin{aligned} G_2 &= \eta_1 + H_2(q, p, \xi_1), \\ H_2 &= \frac{p^2}{2(1-\alpha\varphi_2)^2} + \frac{\alpha\beta}{\pi^2} (1-\alpha\varphi_2) q^2 + \mu^2 \left\{ \frac{\alpha(4\beta+1)\varphi_2-1}{2\pi^2(1-\alpha\varphi_2)} q^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[\alpha(2\beta-3)\varphi_2-1]\varphi_1}{\pi(1-\alpha\varphi_2)^3} qp + \frac{7\alpha\varphi_2^2-(6\alpha-1)\varphi_2-2}{2(1-\alpha\varphi_2)^5} p^2 \right\} + O(\mu^3). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь φ_1, φ_2 — функции (4.10), в которых аргумент τ заменен на ξ_1 .

6. Изоэнергетическая редукция

При исследовании устойчивости периодического движения маятника воспользуемся методом поверхностей сечения Пуанкаре [5]. Для этого зафиксируем уровень энергии (4.11), отвечающий невозмущенному движению, и рассмотрим возмущенные траектории на поверхности $\xi_1 = 0$. Эта поверхность отвечает этапу ударного движения маятника.

Принимая во внимание разложение (5.4), разрешим соотношение (4.11) относительно η_1 . Получим $\eta_1 = -H(q, p, \xi_1)$, причем

$$H = \sum_{k=2}^{\infty} H_k(q, p, \xi_1), \quad (6.1)$$

где H_k — формы степени k относительно q, p с 2π -периодическими относительно ξ_1 коэффициентами. Форма H_2 определена вторым из равенств (5.5), а формы H_3 и H_4 таковы:

$$H_3 = \mu \left\{ \frac{\sqrt{\beta} [3(2\beta + 3)\alpha\varphi_2 - 2\alpha - 3]}{6\pi^2} q^3 - \frac{\sqrt{\beta} (1 + \alpha\varphi_2)\varphi_1}{2\pi(1 - \alpha\varphi_2)^2} q^2 p + \right. \\ \left. + \frac{(2\beta - 3)\alpha\varphi_2 - 1}{4\alpha\sqrt{\beta}(1 - \alpha\varphi_2)^3} qp^2 - \frac{\pi(7\alpha\varphi_2 + 1)\varphi_1}{4\alpha\sqrt{\beta}(1 - \alpha\varphi_2)^5} p^3 \right\} + O(\mu^3), \quad (6.2)$$

$$H_4 = \frac{(1 - \alpha\varphi_2)(15\alpha\varphi_2 - 2\alpha - 3)\beta}{24\pi^2} q^4 - \frac{1 + \alpha\varphi_2}{8\alpha(1 - \alpha\varphi_2)^2} q^2 p^2 - \\ - \frac{(7\alpha\varphi_2 + 1)\pi^2}{32\alpha^2\beta(1 - \alpha\varphi_2)^5} p^4 + O(\mu^2). \quad (6.3)$$

Уравнения движения на рассматриваемом изоэнергетическом уровне (уравнения Уиттекера [6]), будут каноническими с функцией Гамильтона (6.1). Роль независимой переменной в этих уравнениях играет координата ξ_1 . Задача об орбитальной устойчивости изучаемого периодического движения маятника эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия $q = p = 0$ системы с функцией Гамильтона (6.1). Последняя задача решалась при помощи анализа соответствующего этой функции отображения (за период 2π изменения величины ξ_1) окрестности положения равновесия на себя. Этот анализ проводился методами, разработанными ранее в [7–9].

7. Об устойчивости периодического движения (2.8) в двух предельных частных случаях

Случай $\alpha = 0$. В этом случае функция Гамильтона (4.5) имеет вид

$$G = \frac{\mu^2 + (1 - x)^2}{2\beta(1 - x)^2} p_x^2 + \frac{p_y^2}{2[\mu^2 + (1 - x)^2]}, \quad (7.1)$$

а периодическое решение (4.9) вырождается в равновесие $x = y = p_x = p_y = 0$.

Координата y является циклической, поэтому $p_y = p_y^0 = \text{const}$, а

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{p_y^0}{2[\mu^2 + (1 - x)^2]}.$$

Если $p_y^0 \neq 0$, то $|y|$ монотонно возрастает с ростом τ , поэтому периодическое движение (2.8) в рассматриваемом предельном случае $\alpha = 0$ неустойчиво.

Случай $\beta = 1$. Пусть величины J_c и r пренебрежимо малы, а $\beta = 1$. Тогда величинами порядка μ и выше можно пренебречь и движение (2.8) задается равенствами

$$y = 0, \quad p_y = 0, \quad x = \alpha \varphi_2(\tau), \quad p_x = \frac{2\alpha}{\pi} \varphi_1(\tau), \quad (7.2)$$

а функция Гамильтона (4.5) записывается в виде

$$G = \frac{1}{2} \left[p_x^2 + \frac{p_y^2}{(1-x)^2} \right] - \frac{2\alpha}{\pi^2} (1-x) \cos y + \frac{2\alpha}{\pi^2}. \quad (7.3)$$

Функция (7.3) с точностью до аддитивной постоянной и обозначений координат и импульсов совпадает с функцией (1.1) из статьи [10], где исследовались колебания материальной точки, подвешенной на идеальной нити в однородном поле тяжести. Из [10] следует, что при $\beta = 1$ периодическое движение (2.8) маятника Максвелла устойчиво, если $0 < \alpha \leq 1/2$, и неустойчиво, если $1/2 < \alpha < 1$.

8. Исследование устойчивости в случае $\mu = 0$

Пусть q_0, p_0 — начальные (при $\xi_1 = 0$) значения величин q, p , а $q_1(q_0, p_0), p_1(q_0, p_0)$ — вычисленные при $\xi_1 = 2\pi$ значения функций $q(q_0, p_0, \xi_1), p(q_0, p_0, \xi_1)$, являющихся решением системы канонических дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона (6.1). Функции $q_1(q_0, p_0), p_1(q_0, p_0)$ задают аналитическое сохраняющее площадь отображение $q_0, p_0 \rightarrow q_1, p_1$ окрестности точки $q = p = 0$ на себя.

Линеаризованное отображение задается вычисленной при $\xi_1 = 2\pi$ матрицей $\mathbf{X}(\xi_1)$, элементы $x_{ij}(\xi_1)$ которой удовлетворяют линейной системе уравнений с функцией Гамильтона H_2 из (5.5)

$$\frac{dx_{1j}}{d\xi_1} = \frac{\partial H_2(x_{1j}, x_{2j}, \xi_1)}{\partial x_{2j}}, \quad \frac{dx_{2j}}{d\xi_1} = -\frac{\partial H_2(x_{1j}, x_{2j}, \xi_1)}{\partial x_{1j}} \quad (j = 1, 2) \quad (8.1)$$

и начальным условиям

$$x_{11}(0) = x_{22}(0) = 1, \quad x_{12}(0) = x_{21}(0) = 0. \quad (8.2)$$

Характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$ имеет вид

$$\varrho^2 - 2a\varrho + 1 = 0 \quad (2a = x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi)). \quad (8.3)$$

Величина a — функция параметров задачи α, β, μ . Если $|a| > 1$, то уравнение (8.3) имеет корень с модулем, большим единицы. Поэтому условие $|a| > 1$ является достаточным для неустойчивости периодического движения (2.8) [11]. Необходимое условие устойчивости задается неравенством $|a| \leq 1$; в случае $|a| < 1$ движение устойчиво в первом (линейном) приближении, равенство $|a| = 1$ определяет границы областей устойчивости и неустойчивости.

В этом разделе статьи решается нелинейная задача об устойчивости периодического движения (2.8) в предельном случае, когда безразмерный параметр μ , определяемый равенством (4.7), считается равным нулю. В этом случае разложение (6.1) не содержит форм H_k нечетных степеней, а формы H_2 и H_4 определяются равенствами (5.5) и (6.3) отбрасыванием членов, содержащих μ .

Анализ устойчивости в первом (линейном) приближении. При $\mu = 0$ имеем

$$H_2 = \frac{p^2}{2(1 - \alpha\varphi_2)^2} + \frac{\alpha\beta}{\pi^2}(1 - \alpha\varphi_2)q^2 \quad \left(\varphi_2 = \frac{\xi_1}{\pi} \left(2 - \frac{\xi_1}{\pi} \right) \right). \quad (8.4)$$

Рассмотрим несколько случаев, для которых было проведено аналитическое исследование.

1. *Случай* $0 < \alpha \ll 1$. При малых значениях параметра α решение системы уравнений (8.1), удовлетворяющее начальным условиям (8.2), будет таким:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 1 - \frac{\alpha\beta}{\pi^2} \xi_1^2 + O(\alpha^2), & x_{12} &= \xi_1 + \alpha \left(\frac{2}{\pi} \xi_1^2 - \frac{\beta+2}{3\pi^2} \xi_1^3 \right) + O(\alpha^2), \\ x_{21} &= -2\frac{\alpha\beta}{\pi^2} \xi_1 + O(\alpha^2), & x_{22} &= 1 - \frac{\alpha\beta}{\pi^2} \xi_1^2 + O(\alpha^2). \end{aligned}$$

Поэтому величина a из (8.3) вычисляется по формуле

$$a = 1 - 4\alpha\beta + O(\alpha^2).$$

Для любого заданного значения β при достаточно малом, отличном от нуля, значении α выполняется неравенство $0 < a < 1$ и, следовательно, периодическое движение (2.8) устойчиво в первом приближении.

2. *Случай значений β , близких к 1.* Положим $\beta = 1 + \varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll 1$). Пусть $\mathbf{X}_0(\xi_1)$ — матрица $\mathbf{X}(\xi_1)$, определяемая уравнениями (8.1) с функцией Гамильтона (8.4), вычисленной при $\beta = 1$. Для ее элементов $x_{ij}^0(\xi_1)$ можно получить такие выражения:

$$\begin{aligned} x_{11}^0 &= -\frac{\pi(2\alpha\xi_1 - \pi)}{\alpha\xi_1^2 - 2\pi\alpha\xi_1 + \pi^2}, & x_{12}^0 &= \frac{\pi^2\xi_1}{\alpha\xi_1^2 - 2\pi\alpha\xi_1 + \pi^2}, \\ x_{21}^0 &= \frac{2\alpha\xi_1(\alpha\xi_1 - \pi)}{\pi^3}, & x_{22}^0 &= -\frac{\alpha\xi_1^2 - \pi^2}{\pi^2}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Матрица $\mathbf{X}(2\pi)$ линеаризованного отображения может быть представлена в следующей форме:

$$\mathbf{X}(2\pi) = \mathbf{X}_0(2\pi) \left(\mathbf{E} + \varepsilon \int_0^{2\pi} \mathbf{X}_0^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{X}_0 d\xi_1 + O(\varepsilon^2) \right), \quad (8.6)$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица, а

$$\mathbf{X}_0^{-1} = \begin{vmatrix} x_{22}^0 & -x_{12}^0 \\ -x_{21}^0 & x_{11}^0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{Y} = -\frac{2\alpha}{\pi^2} (1 - \alpha\varphi_2) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (8.7)$$

Из (8.5)–(8.7) после некоторых довольно громоздких вычислений получаем выражение для величины a из (8.3):

$$a = 1 - 4\alpha + 4\varepsilon\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \arctg \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} - 2 \right) + O(\varepsilon^2). \quad (8.8)$$

Отсюда и из равенства $|a| = 1$ можно получить приближенные уравнения границ областей устойчивости и неустойчивости.

В окрестности точки $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ существует одна граница $a = -1$, задаваемая уравнением

$$\alpha = \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (8.9)$$

В окрестности точки $\alpha = 1$, $\beta = 1$ существуют две границы:

$$\beta = 1 + \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \alpha} + O((1 - \alpha)) \quad (8.10)$$

и

$$\beta = 1 + \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \alpha} + O((1 - \alpha)). \quad (8.11)$$

На кривых (8.10) и (8.11) имеем $a = 1$ и $a = -1$ соответственно.

3. *Случай* $\beta \gg 1$. Сделаем предварительно два канонических преобразования (не предполагая пока, что $\beta \gg 1$).

Сначала в системе с функцией Гамильтона (8.4) введем новые переменные: независимую переменную $\tilde{\xi}_1$ и канонически сопряженные переменные $\tilde{q}$, $\tilde{p}$ по формулам

$$\xi_1 = \frac{\tilde{\xi}_1}{\sqrt{\beta}}, \quad q = \tilde{q}, \quad p = \sqrt{\beta} \tilde{p}. \quad (8.12)$$

Новым переменным отвечает функция Гамильтона $\tilde{H}_2$ вида

$$\tilde{H}_2 = \frac{1}{2} b \tilde{p}^2 + \frac{\omega^2}{2b} \tilde{q}^2, \quad (8.13)$$

где

$$b = \frac{1}{(1 - \alpha \tilde{\varphi}_2)^2}, \quad \tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 \left(\frac{\tilde{\xi}_1}{\sqrt{\beta}} \right), \quad \omega = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\pi \sqrt{1 - \alpha \tilde{\varphi}_2}}. \quad (8.14)$$

Еще одно каноническое преобразование $\tilde{q}$, $\tilde{p} \rightarrow Q$, P зададим формулами

$$\tilde{q} = \sqrt{\frac{2b}{\omega}} P \sin Q, \quad \tilde{p} = \sqrt{\frac{2\omega}{b}} P \cos Q. \quad (8.15)$$

Преобразованию (8.15) соответствует производящая функция

$$S = \frac{\omega}{2b} \tilde{q}^2 \operatorname{ctg} Q. \quad (8.16)$$

Преобразованная функция Гамильтона K определяется соотношением

$$K = \tilde{H}_2 + \frac{\partial S}{\partial \tilde{\xi}_1}, \quad (8.17)$$

в правой части которого переменные $\tilde{q}$, $\tilde{p}$ заменены на их выражения (8.15). Из (8.13)–(8.17) получаем

$$K = \omega P - \frac{3\alpha}{4(1 - \alpha \tilde{\varphi}_2)} \frac{d\tilde{\varphi}_2}{d\tilde{\xi}_1} P \sin 2Q. \quad (8.18)$$

Теперь (считая, что $\beta \gg 1$) введем малый параметр $\varepsilon = 1/\sqrt{\beta}$. Тогда функция (8.18) принимает вид

$$K = \omega P - \varepsilon \frac{3\alpha(\pi - \varepsilon\tilde{\xi}_1)}{2\pi^2(1 - \alpha\tilde{\varphi}_2)} P \sin 2Q, \quad \tilde{\varphi}_2 = \frac{\varepsilon\tilde{\xi}_1}{\pi} \left(2 - \frac{\varepsilon\tilde{\xi}_1}{\pi} \right). \quad (8.19)$$

При помощи канонического преобразования $Q, P \rightarrow \tilde{Q}, \tilde{P}$, задаваемого соотношениями

$$\tilde{Q} = \frac{\partial V}{\partial \tilde{P}}, \quad P = \frac{\partial V}{\partial Q}, \quad V = Q\tilde{P} - \varepsilon \frac{3\alpha(\pi - \varepsilon\tilde{\xi}_1)}{4\omega\pi^2(1 - \alpha\tilde{\varphi}_2)} \tilde{P} \cos 2Q, \quad (8.20)$$

в функции Гамильтона (8.19) можно уничтожить второе слагаемое. Замена $Q, P \rightarrow \tilde{Q}, \tilde{P}$ имеет вид

$$Q = \tilde{Q} + O(\varepsilon), \quad P = \tilde{P} + \varepsilon \frac{3\alpha(\pi - \varepsilon\tilde{\xi}_1)}{2\omega\pi^2(1 - \alpha\tilde{\varphi}_2)} \tilde{P} \sin 2\tilde{Q} + O(\varepsilon^2), \quad (8.21)$$

а для новой функции Гамильтона $\tilde{K} = K + \partial V / \partial \tilde{\xi}_1$ получаем выражение

$$\tilde{K} = \omega\tilde{P} + O(\varepsilon^2). \quad (8.22)$$

На интервале $\tilde{\xi}_1 \sim \varepsilon^{-1}$ (а $\xi_1 \sim 1$) с погрешностью порядка ε имеем

$$P = P_0, \quad Q = \int_0^{\tilde{\xi}_1} \omega d\tilde{\xi}_1 + Q_0, \quad (8.23)$$

где Q_0, P_0 — произвольные постоянные.

Из (8.23) и (8.15) следует, что приближенное общее решение линейных дифференциальных уравнений, определяемых функцией Гамильтона (8.13), (8.14), может быть записано в виде

$$\tilde{q} = \sqrt{\frac{2b}{\omega}} P_0 \sin Q, \quad \tilde{p} = \sqrt{\frac{2\omega}{b}} P_0 \cos Q, \quad Q = \left(\frac{\sqrt{2\alpha\beta}}{\pi} \int_0^{\xi_1} \frac{d\xi_1}{\sqrt{1 - \alpha\varphi_2(\xi_1)}} + Q_0 \right). \quad (8.24)$$

Отсюда после несложных вычислений находим следующее приближенное выражение для величины a из характеристического уравнения (8.3):

$$a = \cos \left(\frac{\sqrt{2\alpha\beta}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\xi_1}{\sqrt{1 - \alpha\varphi_2(\xi_1)}} \right) = \cos \left(\sqrt{2\beta} \ln \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{1 - \sqrt{\alpha}} \right). \quad (8.25)$$

Из выражения (8.25) и равенства $|a| = 1$ следует, что в плоскости (α, β) существуют счетные множества областей устойчивости h_n и неустойчивости g_n ($n = 1, 2, \dots$). При больших значениях β границы этих областей близки к кривым

$$\beta = \frac{\pi^2}{2} n^2 \ln^{-2} \left(\frac{1 + \sqrt{\alpha}}{1 - \sqrt{\alpha}} \right). \quad (8.26)$$

При малых α кривые (8.26) мало отличаются от гипербол

$$\beta = \frac{\pi^2 n^2}{8\alpha},$$

а при значениях α , близких к единице, — от кривых

$$1 - \sqrt{\alpha} = e^{-\frac{\pi n}{\sqrt{2\beta}}}.$$

В последнем случае ширина областей устойчивости и неустойчивости экспоненциально убывает с ростом n .

4. *Случай $\alpha = 1$.* В этом случае линейная задача об устойчивости периодического движения (2.8) решается очень просто, так как систему уравнений, отвечающую функции (8.4), можно заменой независимой переменной привести к системе с кусочно-постоянными коэффициентами.

Действительно, при $\alpha = 1$ функция (8.18) (к которой посредством замен переменных (8.12) и (8.15) приводится функция (8.4)) будет такой:

$$K = \frac{\sqrt{2\beta}}{|\pi\sqrt{\beta} - \tilde{\xi}_1|} P - \frac{3}{2(\pi\sqrt{\beta} - \tilde{\xi}_1)} P \sin 2Q. \quad (8.27)$$

Если вместо $\tilde{\xi}_1$ в качестве независимой переменной принять переменную ν , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d\nu}{d\tilde{\xi}_1} = \frac{\sqrt{2\beta}}{|\pi\sqrt{\beta} - \tilde{\xi}_1|},$$

а вместо Q и P ввести новые канонически сопряженные переменные u и v по формулам

$$u = \sqrt{2P} \sin Q, \quad v = \sqrt{2P} \cos Q,$$

то вместо функции (8.27) получим квадратичную форму с кусочно-постоянными коэффициентами

$$K = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \frac{3\sqrt{2}\sigma}{4\sqrt{\beta}} uv \quad \left(\sigma = \text{sign}(\pi\sqrt{\beta} - \tilde{\xi}_1) \right). \quad (8.28)$$

Характеристическое уравнение линейной системы с функцией Гамильтона (8.28) имеет вид

$$\lambda^2 + 1 - \frac{9}{8\beta} = 0.$$

Отсюда следует, что при $1 < \beta < 9/8$ периодическое движение неустойчиво, а при $\beta > 9/8$ — устойчиво в первом приближении.

5. *Об областях устойчивости и неустойчивости.* При произвольных значениях параметров α и β из области их физически допустимых значений (см. (2.7)) линейная задача об устойчивости может быть исследована численно путем интегрирования уравнений (8.1) с начальными условиями (8.2) и последующим вычислением величины $a = a(\alpha, \beta)$, определяемой вторым из соотношений (8.3).

Кратко опишем результаты аналитического и численного исследования линейной задачи об устойчивости периодического движения маятника Максвелла. Как отмечалось выше, множества областей устойчивости h_n и неустойчивости g_n ($n = 1, 2, \dots$) счетны. На рисунке 3 показаны первые пять областей устойчивости и четыре области неустойчивости.

Рис. 3. Области неустойчивости и устойчивости в первом приближении.

Области неустойчивости заштрихованы. Через γ_{nl} и γ_{nr} обозначены, соответственно, левая и правая границы области g_n . При $\beta > 10$, при $\alpha > 0.999$, а также для значений параметров α , β , лежащих правее и выше левой границы γ_{5l} пятой области неустойчивости, численное исследование не проводилось.

Левой границей области h_1 является прямая $\alpha = 0$, $\beta \geq 1$, а нижней — отрезок $0 \leq \alpha \leq 1/2$ прямой $\beta = 1$; правая граница области h_1 — кривая γ_{1l} .

Правая граница γ_{1r} области g_1 и левая граница γ_{2l} области g_2 при увеличении α сближаются и стремятся к точке $(1, 1)$, в этой точке кривые γ_{2l} и γ_{1r} имеют общую вертикальную касательную (см. (8.10) и (8.11)). Все остальные граничные кривые γ_{nl} , γ_{nr} лежат левее прямой $\alpha = 1$ и при $\alpha \rightarrow 1$ стремятся к точке $P(1, 9/8)$ (рис. 3).

Область неустойчивости g_2 при $\alpha \rightarrow 1$ примыкает к отрезку $1 \leq \beta \leq 9/8$ прямой $\alpha = 1$, ширина же всех других областей неустойчивости g_n ($n = 3, 4, \dots$) стремится к нулю при $\alpha \rightarrow 1$.

Внутри областей g_n выполняется достаточное условие неустойчивости $|a| > 1$ исследуемого периодического движения маятника. В этих областях один из корней $\varrho = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ уравнения (8.3) имеет модуль, больший единицы.

Внутри областей h_n , где $|a| < 1$, корни уравнения (8.3) комплексно-сопряженные, $\varrho_{1,2} = \cos \delta \pm i \sin \delta$, причем

$$\cos \delta = a, \quad \sin \delta = \sqrt{1 - a^2}. \quad (8.29)$$

Здесь исследуемое периодическое движение устойчиво в первом (линейном) приближении. Строгое же исследование устойчивости требует рассмотрения нелинейной задачи.

Если корень ϱ уравнения (8.3) таков, что для натурального k имеет место равенство $\varrho^k = 1$, то говорят, что имеет место резонанс k -го порядка.

На границах γ_{nl} и γ_{nr} области неустойчивости g_n при нечетном n реализуется резонанс второго порядка ($a = -1$, $\varrho_1 = \varrho_2 = -1$), а при четном n — резонанс первого порядка ($a = 1$, $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$).

Вычисления показали, что элементы матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$ линеаризованного отображения $q_0, p_0 \rightarrow q_1, p_1$ таковы: на границах $\gamma_{1\ell}, \gamma_{3\ell}, \gamma_{5\ell}$ —

$$x_{11} = x_{22} = -1, \quad x_{12} > 0, \quad x_{21} = 0, \quad (8.30)$$

на границах γ_{1r} и γ_{3r} —

$$x_{11} = x_{22} = -1, \quad x_{12} = 0, \quad x_{21} > 0, \quad (8.31)$$

на границах $\gamma_{2\ell}$ и $\gamma_{4\ell}$ —

$$x_{11} = x_{22} = 1, \quad x_{12} < 0, \quad x_{21} = 0, \quad (8.32)$$

на границах γ_{2r} и γ_{4r} —

$$x_{11} = x_{22} = 1, \quad x_{12} = 0, \quad x_{21} < 0. \quad (8.33)$$

Из (8.30)–(8.33) следует, что на всех девяти показанных на рисунке 3 границах областей g_n матрица $\mathbf{X}(2\pi)$ не приводится к диагональной форме. Поэтому на всех этих границах исследуемое периодическое движение маятника неустойчиво в первом (линейном) приближении. Однако для строгого решения вопроса об устойчивости здесь, как и для значений параметров α, β , лежащих внутри областей h_n ($n = 1, 2, \dots, 5$), необходим анализ нелинейного отображения $q_0, p_0 \rightarrow q_1, p_1$.

Об алгоритме нелинейного анализа. Отображение $q_0, p_0 \rightarrow q_1, p_1$ может быть найдено при помощи представления решения нелинейной системы дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона (6.1) в виде рядов по начальным (при $\xi_1 = 0$) значениям q_0, p_0 величин q, p . При вычислении коэффициентов рядов удобно воспользоваться алгоритмом из статьи [8]. Для применения этого алгоритма целесообразно предварительно сделать в функции Гамильтона (6.1) линейную замену переменных $q, p \rightarrow Q, P$, приводящую матрицу $\mathbf{X}(2\pi)$ линеаризованного отображения к ее вещественной нормальной форме $\mathbf{G}$. Задача об устойчивости равновесия $q = p = 0$ системы с функцией Гамильтона (6.1) приводится [8] к задаче об устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ нелинейного отображения $x, y \rightarrow x_1, y_1$, сохраняющего площадь и задаваемого равенствами

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix}, \quad (8.34)$$

где x_*, y_* — функции от x, y , определяемые соотношениями

$$x = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad y_* = \frac{\partial F}{\partial x_*}; \quad F = x_* y + \sum_{r+s=3}^{\infty} f_{rs} x_*^r y^s. \quad (8.35)$$

Условия устойчивости и неустойчивости выражаются через коэффициенты f_{rs} [9]. Алгоритм вычисления этих коэффициентов по функции Гамильтона (6.1) и матрице $\mathbf{X}(2\pi)$ указан в разделе 4 статьи [8].

Нелинейный анализ на границах $\gamma_{n\ell}$ и γ_{nr} областей неустойчивости и устойчивости в первом приближении. На границах $\gamma_{1\ell}, \gamma_{1r}, \gamma_{3\ell}, \gamma_{3r}, \gamma_{5\ell}$ вещественной нормальной формой матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$ будет матрица

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая линейная нормализующая замена переменных $q, p \rightarrow Q, P$ имеет следующий вид: на границах $\gamma_{1\ell}, \gamma_{3\ell}, \gamma_{5\ell}$ (см. (8.30))

$$q = \sqrt{x_{12}} Q, \quad p = \frac{1}{\sqrt{x_{12}}} P,$$

а на границах γ_{1r}, γ_{3r} (см. (8.31))

$$q = \frac{1}{\sqrt{x_{21}}} P, \quad p = \sqrt{x_{21}} Q.$$

Так как в рассматриваемом случае ($\mu = 0$) форма третьей степени H_3 в разложении (6.1) тождественно равна нулю, в функции F из (8.35) нет членов третьей степени относительно x_*, y . Члены же четвертой степени в этой функции есть, причем, как показывают вычисления, коэффициент f_{40} положителен на кривых $\gamma_{1\ell}, \gamma_{3\ell}, \gamma_{5\ell}$ и отрицателен на кривых γ_{1r}, γ_{3r} . Следовательно (см. [9], теорема 8), на граничных кривых $\gamma_{1\ell}, \gamma_{3\ell}, \gamma_{5\ell}$ исследуемое периодическое движение маятника устойчиво, а на кривых γ_{1r}, γ_{3r} — неустойчиво.

На границах $\gamma_{2\ell}, \gamma_{2r}, \gamma_{4\ell}, \gamma_{4r}$ вещественной нормальной формой матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$ является матрица

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая линейная нормализующая замена переменных на границах $\gamma_{2\ell}, \gamma_{4\ell}$ имеет вид (см. (8.32))

$$q = \sqrt{-x_{12}} Q, \quad p = -\frac{1}{\sqrt{-x_{12}}} P,$$

а на границах γ_{2r}, γ_{4r} (см. (8.33)) — вид

$$q = -\frac{1}{\sqrt{-x_{21}}} P, \quad p = \sqrt{-x_{21}} Q.$$

Вычисления показывают, что на границах $\gamma_{2\ell}, \gamma_{4\ell}$ коэффициент f_{40} отрицателен, а на границах γ_{2r}, γ_{4r} положителен. Следовательно (см. [9], теорема 7), на границах $\gamma_{2\ell}, \gamma_{4\ell}$ имеет место устойчивость, а на границах γ_{2r}, γ_{4r} — неустойчивость.

Таким образом, справедливо следующее утверждение: на левых границах $\gamma_{n\ell}$ областей g_n периодическое движение маятника Максвелла орбитально устойчиво, а на правых границах γ_{nr} ($n = 1, 2, \dots, 5$) — неустойчиво.

Нелинейный анализ внутри областей h_n устойчивости в первом приближении. Пусть параметры α, β лежат в какой-либо из областей h_n ($n = 1, 2, \dots, 5$) устойчивости в первом приближении. Тогда вещественной нормальной формой матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$ линеаризованного отображения $q_0, p_0 \rightarrow q_1, p_1$ будет матрица

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}, \quad (8.36)$$

задающая поворот на угол δ , определяемый равенствами (8.29). В качестве линейного нормализующего преобразования $q, p \rightarrow Q, P$ можно взять замену переменных вида

$$q = Q, \quad p = -\frac{x_{11} - \cos \delta}{x_{12}} Q + \frac{\sin \delta}{x_{12}} P. \quad (8.37)$$

Для задачи об устойчивости существенно наличие или отсутствие резонансов. Внутри областей устойчивости в первом приближении возможны только такие резонансы, порядок которых больше двух. Особенно важны резонансы третьего и четвертого порядков, так как они проявляются при учете в отображении (8.34) первых нелинейных членов, которые, в общем случае, имеют вторую и третью степень относительно x, y (им отвечают члены третьей и четвертой степеней в разложении (8.35) функции F в ряд). При резонансах третьего и четвертого порядков величина a в характеристическом уравнении (8.3) равна $-1/2$ и 0 соответственно.

В каждой из областей h_n ($n = 1, 2, \dots$) существует по одной кривой r_n резонанса третьего порядка и по одной кривой s_n резонанса четвертого порядка. На рисунке 4 показаны пять кривых резонанса третьего порядка (штриховые линии) и пять кривых резонансов четвертого порядка (сплошные линии).

Рис. 4. Кривые r_n и s_n резонансов третьего и четвертого порядков.

Лежащие в области h_1 резонансные кривые r_1 и s_1 начинаются в точках $(3/8, 1)$ и $(1/4, 1)$ соответственно; при $\alpha \rightarrow 0$ эти кривые уходят в область бесконечно больших значений β .

Кривые r_2 и s_2 из области h_2 при $\alpha \rightarrow 1$ стремятся к точке $(1, 1)$. Остальные кривые резонансов третьего и четвертого порядков при $\alpha \rightarrow 1$ стремятся к точке $P(1, 9/8)$.

Об устойчивости при отсутствии резонансов четвертого порядка. При $\mu = 0$ в отображении (8.34) первые нелинейные члены имеют третью степень. Так как члены второй степени отсутствуют, то резонансы третьего порядка не влияют на решение задачи об устойчивости по третьему приближению. Здесь существенными могут оказаться резонансы четвертого порядка.

Пусть параметры α, β лежат в какой-либо из пяти областей h_n устойчивости в первом приближении и не попадают на кривые s_n резонансов четвертого порядка. Для исследования устойчивости найдем величину c_2 , определяемую по формулам (4.20), (4.21) статьи [9]. Так как в разложении (8.35) функции F в ряд нет членов третьей степени, эта величина зависит только от коэффициентов f_{rs} членов четвертой степени:

$$c_2 = -\frac{3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}}{4\pi}. \quad (8.38)$$

Вычисления показывают, что при всех α, β (включая и те, которые принадлежат кривым r_n резонансов третьего порядка) из областей h_n ($n = 1, 2, \dots, 5$) величина c_2 не обращается в нуль: в областях h_1, h_3, h_5 она отрицательна, а в областях h_2, h_4 положительна (причем при приближении параметров α, β к границам областей величина $|c_2|$ неограниченно возрастает).

Так как $c_2 \neq 0$, для значений параметров α, β , лежащих в областях h_n ($n = 1, 2, \dots, 5$) вне кривых s_n резонансов четвертого порядка, имеет место устойчивость (см. [9], теорема 9).

Об устойчивости при резонансах четвертого порядка. Пусть теперь параметры α, β лежат на какой-либо из пяти кривых s_n ($n = 1, 2, \dots, 5$) резонансов четвертого порядка. По формулам (4.46)–(4.48) статьи [9] определим величину

$$\chi = \gamma_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2, \quad (8.39)$$

$$\gamma_2 = -\frac{3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}}{4\pi}, \quad \alpha_2 = \frac{f_{31} - f_{13}}{4\pi}, \quad \beta_2 = -\frac{f_{40} - f_{22} + f_{04}}{4\pi}. \quad (8.40)$$

Вычисления показали, что на всех пяти резонансных кривых s_n величина χ положительна. Следовательно (см. [9], теорема 11), на этих кривых имеет место устойчивость.

Таким образом, показано, что для всех значений параметров α, β , лежащих внутри областей h_n ($n = 1, 2, \dots, 5$), изучаемое периодическое движение маятника Максвелла орбитально устойчиво.

9. Об устойчивости в случае $0 < \mu \ll 1$

Кратко опишем результаты исследования устойчивости периодического движения маятника при малых, но отличных от нуля, значениях параметра μ .

Из (5.5) видно, что при $0 < \mu \ll 1$ значения функции H_2 отличаются от ее значений при $\mu = 0$ величинами не ниже второй степени относительно μ . Поэтому величина a в характеристическом уравнении (8.3) имеет при малых μ поправку порядка μ^2 . Отсюда следует, что показанные на рисунке 3 области неустойчивости и устойчивости в первом приближении g_n и h_n при малых μ переходят в области g_n^* и h_n^* , границы которых $\alpha^*, \gamma_{n\ell}^*, \gamma_{nr}^*$ получаются из границ $\alpha = 0, \gamma_{n\ell}, \gamma_{nr}$ деформацией последних на величины порядка μ^2 . Учитывая равенства (5.5), (6.2), (6.3) и опираясь на раздел 4 статьи [8], можно также показать, что коэффициенты f_{rs} членов третьей степени в разложении (8.35) — величины порядка μ , а коэффициенты членов четвертой степени отличаются от их значений при $\mu = 0$ на величины порядка μ^2 .

Об устойчивости в областях g_n^ .* Внутри областей g_n^* при достаточно малых μ периодическое движение (2.8) неустойчиво, что следует из непрерывности корней уравнения (8.3) по параметру μ [11].

Об устойчивости на границах областей h_n^ и g_n^* .* Рассмотрим сначала границы $\gamma_{1\ell}^*, \gamma_{1r}^*, \gamma_{3\ell}^*, \gamma_{3r}^*, \gamma_{5\ell}^*$, отвечающие резонансу второго порядка. Вычислим величину

$$g = 12f_{30}f_{21} - 9f_{30}^2 - 8f_{40}. \quad (9.1)$$

Если $g < 0$, то будет устойчивость, а если $g > 0$ — неустойчивость (см. [9], теорема 8).

При малых μ знак величины g совпадает со знаком третьего слагаемого в правой части равенства (9.1), вычисленного при $\mu = 0$. Но, как уже отмечалось выше, при $\mu = 0$ величина f_{40} положительна на кривых $\gamma_{1\ell}, \gamma_{3\ell}, \gamma_{5\ell}$ и отрицательна на кривых γ_{1r}, γ_{3r} . Поэтому из теоремы 8 статьи [9] следует, что при резонансах второго порядка выводы об устойчивости

при достаточно малых значениях μ остаются такими же, какими они были при $\mu = 0$, то есть на границах $\gamma_{1\ell}^*$, $\gamma_{3\ell}^*$, $\gamma_{5\ell}^*$ будет устойчивость, а на границах γ_{1r}^* , γ_{3r}^* — неустойчивость.

На границах же $\gamma_{2\ell}^*$, γ_{2r}^* , $\gamma_{4\ell}^*$, γ_{4r}^* , отвечающих резонансу первого порядка, ситуация несколько иная. Согласно теореме 7 статьи [9], если на этих границах $f_{30} \neq 0$, то периодическое движение неустойчиво; если же $f_{30} = 0$, но при этом величина $\chi_1 = 2f_{40} + f_{21}^2$ положительна (отрицательна), то имеет место неустойчивость (устойчивость).

Как упоминалось выше, при $\mu = 0$ величина f_{40} на кривых γ_{2r} , γ_{4r} положительна. Поэтому при достаточно малых μ на границах γ_{2r}^* , γ_{4r}^* периодическое движение маятника неустойчиво (как это было и при $\mu = 0$ на кривых γ_{2r} , γ_{4r}).

На кривой $\gamma_{4\ell}^*$ будет неустойчивость, так как на всей этой кривой коэффициент f_{30} оказался отличным от нуля (на кривой же $\gamma_{4\ell}$ при $\mu = 0$ выше была показана устойчивость).

На кривой $\gamma_{2\ell}^*$ при достаточно малых μ также будет неустойчивость из-за того, что $f_{30} \neq 0$. Исключение составляет только одна точка Q^* этой кривой, в которую при малых μ переходит точка $Q(0.699, 3.125)$ кривой $\gamma_{2\ell}$ (см. рис. 5); как показывают вычисления, в этой точке $\chi_1 = -12.109 + O(\mu^2) < 0$. Поэтому в точке Q^* при достаточно малых μ периодическое движение маятника устойчиво.

Рис. 5. К анализу устойчивости при малых значениях μ . Значения остальных параметров: $P(1, 9/8)$, $Q(0.699, 3.125)$, $R(0.403, 4.127)$, $S(0.766, 5.132)$.

Отметим еще, что на граничной кривой α^* , в которую при малых μ переходит прямолинейная граница $\alpha = 0$ области h_1 , имеет место неустойчивость в первом (линейном) приближении. Нелинейная задача здесь не рассматривалась.

Об устойчивости в областях h_n^ .* Показанные на рисунке 4 кривые r_n и s_n резонансов третьего и четвертого порядков при малых μ переходят (деформируясь на величины порядка μ^2) в кривые r_n^* и s_n^* , лежащие в областях h_n^* ($n = 1, 2, \dots, 5$).

Если параметры задачи лежат в областях h_n^* и не попадают на кривые резонансов третьего порядка r_n^* , то при достаточно малых μ исследуемое периодическое движение маятника будет устойчивым. Это следует из теорем 9 и 11 статьи [9], так как (задаваемые равенствами (4.20), (4.21) и (4.46)–(4.48) статьи [9]) величины s_2 и γ_2 , α_2 , β_2 с погрешностью порядка μ^2 совпадают с величинами (8.38), (8.40), вычисленными при $\mu = 0$, и, следова-

тельно (см. предыдущий раздел статьи), при малых μ величина c_2 отлична от нуля (она отрицательна в областях h_1^* , h_3^* , h_5^* и положительна в областях h_2^* , h_4^*). Величина же χ , определяемая равенством (8.39), при малых μ будет положительна на всех кривых s_n^* резонансов четвертого порядка.

Резонансы третьего порядка при $\mu \neq 0$ оказались существенными для задачи об устойчивости, что обусловлено наличием формы H_3 в разложении (6.1). Расчеты показали, что на всех пяти резонансных кривых r_n^* при малых μ величина $\chi_2 = (f_{30} - f_{12})^2 + (f_{21} - f_{03})^2$ отлична от нуля, поэтому (см. [9], теорема 10) на всех этих кривых имеет место неустойчивость. Исключение составляют две точки R^* и S^* , лежащие, соответственно, на кривых r_2^* и r_3^* . На рисунке 5 им отвечают точки $R(0.403, 4.127)$ и $S(0.766, 5.132)$ кривых r_2 и r_3 . В точках R^* и S^* величина χ_2 обращается в нуль, а вычисленная по формуле (4.31) статьи [9] величина c_2 отлична от нуля ($c_2 = 1.281 + O(\mu^2)$ в точке R^* и $c_2 = -3.901 + O(\mu^2)$ в точке S^*). Поэтому (см. [9], теорема 10) при значениях параметров α, β, μ , соответствующих точкам R^* и S^* , периодическое движение (2.8) маятника Максвелла при достаточно малых μ орбитально устойчиво.

References

- [1] Khaykin S. E. *Physical foundation of mechanics*, Moscow: Nauka, 1971 (Russian).
- [2] Sivukhin D. V. *A course of general physics: Vol. 1: Mechanics*, Moscow: Fizmatlit, 2006 (Russian).
- [3] Appell P. *Traité de Mécanique rationnelle: T. 2: Dynamique des systèmes. Mécanique analytique*, 6th ed., Paris: Gauthier-Villars, 1953.
- [4] Markeyev A. P. An algorithm for normalizing Hamiltonian systems in the problem of the orbital stability of periodic motions, *J. Appl. Math. Mech.*, 2002, vol. 66, no. 6, pp. 889–896; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2002, vol. 66, no. 6, pp. 929–938.
- [5] Poincaré H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste: Vol. 3. Invariants intégraux. Solutions périodiques du deuxième genre. Solutions doublement asymptotiques*, Paris: Gauthier-Villars, 1899.
- [6] Whittaker E. T. *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
- [7] Moser J. K. *Lectures on Hamiltonian systems*, Mem. Amer. Math. Soc., No. 81, Providence, R.I.: AMS, 1968.
- [8] Markeyev A. P. A method for analytically representing area-preserving mappings, *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 78, no. 5, pp. 435–444; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 2014, vol. 78, no. 5, pp. 612–624.
- [9] Markeyev A. P. On the fixed points stability for the area-preserving maps, *Nelin. Dinam.*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 503–545 (Russian).
- [10] Markeyev A. P. The oscillations of a particle suspended on an ideal thread, *J. Appl. Math. Mech.*, 1996, vol. 60, no. 2, pp. 233–242; see also: *Prikl. Mat. Mekh.*, 1996, vol. 60, no. 2, pp. 240–249.
- [11] Malkin I. G. *Theory of stability of motion*, Ann Arbor, Mich.: Univ. of Michigan, 1958.

On stability of motion of the Maxwell pendulum

Anatoly P. Markeev

A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences
pr. Vernadskogo 101-1, Moscow, 119526, Russia
Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
Institutskiy per. 9, Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia
markeev@ipmnet.ru

We investigate the stability of motion of the Maxwell pendulum in a uniform gravity field [1, 2]. The threads on which the axis and the disk of the pendulum have been suspended are assumed

to be weightless and inextensible, and the characteristic linear size of the disk is assumed to be small compared to the lengths of threads.

In the unperturbed motion the angle the threads make with the vertical is zero, and the disk moves along the vertical and rotates around its horizontal axis. The nonlinear problem of stability of this motion is solved with respect to small deviations of the threads from the vertical.

By means of canonical transformations and the Poincaré section surface method, the problem is reduced to the study of stability of the fixed point of the area-preserving mapping of the plane into itself. In the space of dimensionless parameters of the problem, regions of stability and instability are found.

MSC 2010: 70H05, 70H15, 70E50

Keywords: stability, map, canonical transformations

Received January 23, 2017, accepted April 10, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 207–226 (Russian)